

北京市高等教育精品教材立项项目

高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

运动学与动力学

汪越胜 税国双 主编

金 明 副主编

电子工业出版社·

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为国家精品课程配套教材,根据教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的“理论力学课程教学基本要求(A类)”编写而成。全书共7章,分别阐述了运动学与动力学的基础理论和方法,内容包括点的运动及刚体的简单运动、点的合成运动、刚体的平面运动、虚位移原理、质点系动力学普遍定理、达朗贝尔原理、动力学普遍方程与拉格朗日方程及附录,重点介绍了最具有理论力学课程特点的基本内容,以不同层次和角度论述了基本概念、基本公式和基本方法。

本书可作为高等院校土建类、机电类相关专业的理论力学教材,也可供高职、高专及成人教育各专业理论力学课程使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容
版权所有·侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

运动学与动力学 / 汪越胜, 税国双主编. —北京: 电子工业出版社, 2011.10

高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

ISBN 978-7-121-14764-7

I. ①运… II. ①汪… ②税… III. ①运动学—高等学校—教材②动力学—高等学校—教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 203714 号

策划编辑: 余 义

责任编辑: 余 义

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 12 字数: 323 千字

印 次: 2011 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 3000 册 定价: 24.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

序

力学是大多数工程科学，如土木工程、机械工程、材料工程、航空航天、能源动力、交通运输、化工等的基础，是工科学生学习专业知识和技能的基础课程。不仅如此，力学还有着不同于其他学科的思维方式，是理工科学生应普遍接受的思维训练之一。

目前，我校的“工程力学”课程被评为国家级精品课程。经过多年的教学实践，并根据教育部力学课程指导委员会组织讨论的教学基本要求和各专业的培养目标、培养计划，进行了从课程体系、教学内容到教学方法、教学手段等全方位的改革，现已形成了一个针对不同专业的、分层次的课程体系。例如，对于土木类的专业，根据其专业特点及后续课程的需求，强调静力学和材料力学部分的知识；而对于机电类的专业，则更加注重运动学、动力学等知识；对于其他短学时的课程，则着重于静力学和材料力学最基础的知识。同时，还从学生的实际情况出发，实行分级教学：A 级为优秀学生班级，重点培养拔尖人才；B 级为一般水平学生班级，教学要求比教育部颁布的基本要求稍高；C 级为基础及能力较差的学生班级，课程教学按教育部颁布的教学基本要求执行。

为了适应不同专业的需求，一般是编写不同的教材；而对于不同层次的分级教学，则主要由老师根据实际情况做出不同的取舍。针对这种情况，我们编写了这套适用于不同专业和层次的工程力学模块化的教材，共分为 4 册：第 1 册为《静力学》；第 2 册为《运动学和动力学》；第 3 册为《材料力学 I》，包括材料力学的基础部分内容；第 4 册为《材料力学 II》，包括材料力学的扩展内容。不管什么专业，只要是有力学教学的需要，都可以通过自行选择不同的分册来得到满足。例如，对于土木类可选择第 1~3 册和第 4 册部分内容；机电类可选择第 1~3 册；其他工科短学时可选择第 1, 3 册；数理学科的学生学习经典力学，则可选择第 1, 2 册。在每册中还可灵活取舍内容，根据学生对先修课程掌握的情况而进行分级教学。

除了上面提到的模块化特点以外，本套教材的编写还突出了以下特色。

(1) **由浅入深，不断强化。**每部分内容都采取由浅入深的讲述方式，便于自学和理解。但在后续讲述中会不断将前面内容系统化，并强调后续内容与先期内容的联系。

(2) **明确知识要点，加强知识点的联系。**工程力学中的知识点很多，虽然在解决实际的工程问题中最终都会起到作用，但学生在学习过程中对这些知识点的理解却是相对孤立的。因此，站在一定的高度，阐明各知识点之间的联系和最终其所发挥的作用，这将非常有利于学生真正掌握力学的思想和解决问题的能力。

(3) **从力学模型的建立和简化到直接的工程应用。**每部分内容都围绕“力引起物体的运动和变形”这一力学的核心思想，由浅入深地讲述从力学模型的建立、简化直至结果结论的工程应用。采取研究型教学的思想，先提出问题和要达到的目的，再讲述为达目的如何建立数学力学模型并简化。

(4) **强调力学与数学的联系。**包括力学模型的数学化、数学公式的力学图像解释和理解。

(5) **定量和定性分析相结合。**通过例题和习题，在定量分析结果的基础上尽可能总结出定性的结论，以帮助学生加强对力学概念的理解，以及获取直接的工程经验。

(6) **习题分级**。将习题分成三级：基本题、提高题、研究型题，以适应不同专业、不同层次的学生。

限于编者的水平，本套教材作为尝试，自然在某些方面会存在不足和疏漏，恳请有关专家、教师、学生随时提出批评和建议，以便我们改进和提高。

编者 (yswang@bjtu.edu.cn)

2011 年于北京交通大学

前言

动力学是研究物体机械运动一般规律的一门学科。研究物体机械运动的普遍规律涉及物体运动的变化、作用于物体的力及物体的质量等，因此动力学问题比静力学问题更为复杂。为了便于“循序渐进，由浅入深”地学习，本教材第 1 章至第 3 章介绍了运动学的知识，从第 4 章起再进一步研究物体的运动的变化与作用在物体上的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

在本教材的编写中，将动力学普遍定理的教学内容列为一章，先讲授质点系的动量定理和动量矩定理，以及在刚体平面运动动力学分析中的应用；然后讲述质点系的动能定理和机械能守恒；最后介绍普遍定理的综合应用及在碰撞过程中的应用。与目前普遍采用的分章节介绍质点和质点系的动量定理、动量矩定理和动能定理的编排体系相比，这样安排的特点在于：突出了动力学普遍定理在“刚体平面运动”这一动力学核心内容中的应用，加强了碰撞与动力学普遍定理的联系，避免了理论力学课程中该部分教学内容与普通物理有关内容的重复。

此外，本教材还注重数学知识在力学课程中的应用，加强解析法及相关原理的数学推导，适当地补充、复习数学知识。同时，对个别地方较复杂的数学计算，适当引入了利用 MATLAB 求解问题的内容，希望能够引导学生培养结合计算机解决力学问题的能力。

本教材的所有章节首先由税国双执笔完成草稿，然后由汪越胜与税国双共同商议调节了个别内容安排，并对草稿进行了仔细全面的修改；金明也对草稿进行了许多修改。在编写过程中，参考了相关理论力学系列的教材，编者在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者（gsshui@bjtu.edu.cn）

目 录

第 1 章 点的运动及刚体的简单运动	(1)
1.1 点的运动	(1)
1.1.1 矢量法	(1)
1.1.2 直角坐标法	(2)
1.1.3 自然坐标法	(5)
1.2 刚体的平动	(10)
1.3 刚体绕定轴的转动	(11)
本章小结	(16)
思考题	(17)
习题	(17)
第 2 章 点的合成运动	(20)
2.1 绝对运动、相对运动和牵连运动	(20)
2.2 点的运动方程合成——三种运动方程间的关系	(21)
2.3 点的速度合成定理——三种运动速度间的关系	(24)
2.4 点的加速度合成定理——三种运动加速度间的关系	(30)
本章小结	(38)
思考题	(39)
习题	(40)
第 3 章 刚体的平面运动	(43)
3.1 刚体的平面运动方程及运动分解	(43)
3.2 平面运动刚体上各点的速度分析	(45)
3.2.1 基点法	(45)
3.2.2 速度投影定理法	(46)
3.2.3 瞬时速度中心法	(48)
3.3 平面运动刚体上各点的加速度分析	(52)
3.4 运动学综合应用	(59)
本章小结	(66)
思考题	(66)
习题	(68)
第 4 章 虚位移原理	(72)
4.1 约束、虚位移、虚功	(72)
4.2 虚位移原理	(78)
4.3 广义力和平衡条件	(88)
本章小结	(92)

思考题	(93)
习题	(94)
第 5 章 质点系动力学普遍定理	(96)
5.1 质点动力学基本方程	(96)
5.2 质点系的动量定理	(98)
5.2.1 动量定理	(98)
5.2.2 质心运动定理	(100)
5.3 质点系的动量矩定理	(103)
5.3.1 动量矩定理	(103)
5.3.2 刚体定轴转动的微分方程	(107)
5.4 刚体平面运动微分方程	(109)
5.5 质点系的动能定理	(116)
5.5.1 动能定理	(116)
5.5.2 机械能守恒定律	(126)
5.6 普遍定理的综合应用	(128)
5.7 碰撞	(132)
本章小结	(137)
思考题	(138)
习题	(140)
第 6 章 达朗贝尔原理	(145)
6.1 质点的达朗贝尔原理	(145)
6.2 质点系的达朗贝尔原理	(146)
6.3 刚体惯性力系的简化	(149)
6.4 绕定轴转动刚体的轴承约束力	(156)
本章小结	(158)
思考题	(159)
习题	(159)
第 7 章 动力学普遍方程与拉格朗日方程	(162)
7.1 动力学普遍方程	(162)
7.2 拉格朗日方程	(163)
7.3 拉格朗日方程的初积分	(169)
本章小结	(171)
习题	(172)
附录 A 常见均质物体的转动惯量和回转半径	(173)
附录 B MATLAB 程序	(175)
附录 C 习题参考答案	(176)
参考文献	(181)

第 1 章

点的运动及刚体的简单运动

点的运动主要研究动点相对于某一个参考系的任意曲线运动，包括点的运动方程、运动轨迹、位移、速度和加速度等。点的运动学既是研究一般物体运动的基础，又可直接应用于工程实际中。描述点的运动有多种方法，本章将介绍常见的矢量表示法、直角坐标表示法和自然坐标表示法。

刚体的平动（translation）和定轴转动（fixed axis rotation）称为刚体的基本（简单）运动。刚体的基本运动是刚体运动的最简单形式，是不可分解的基本运动形态。刚体的复杂运动均可分解成若干基本运动的合成。

1.1 点的运动

点的运动主要有直线运动（rectilinear motion）和曲线运动（curvilinear motion）两种形式。曲线运动又可分为平面曲线运动和空间曲线运动。下面介绍常见的描述点的运动的矢量法、直角坐标法和自然坐标法。

1.1.1 矢量法

运动方程

设动点 M 在空间做曲线运动，如图 1-1 所示。选取参考系上某一个确定点 O 为坐标原点，由点 O 向动点 M 作矢量 \mathbf{r} ，称为该动点对于原点 O 的位置矢量（position vector）或矢径。当动点 M 运动时，矢径 \mathbf{r} 的大小和方向都随时间而变，并且是时间 t 的单值连续函数，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-1)$$

这就是用矢量表示的点的运动方程（equation of motion）。它表明了动点在空间的位置随时间变化的规律。点 M 在运动过程中，其位置矢量的端点描绘出一条连续曲线，称为位置矢端图（hodograph of position vector）。显然，位置矢端图就是点 M 的运动轨迹（trajectory）。

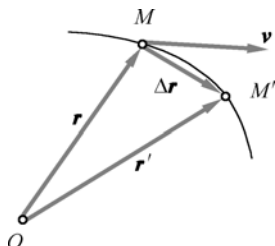


图 1-1 点的运动

速度

设点沿图1-1所示的轨迹运动， t 瞬时位于点 M ，用矢径 $\mathbf{r}(t)$ 描述； $t + \Delta t$ 瞬时位于点 M' ，用矢径 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ 描述。在 Δt 时间间隔内，点的位移为 $\Delta \mathbf{r}$ ，即矢径在 Δt 内的增量为 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ ，则在 Δt 内点 M 的平均速度为 $\mathbf{v}^* = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ ，方向沿 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，平均速度的极限值称为动点在瞬时 t 的**速度**（velocity），即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (1-2)$$

这表明，点的速度等于它的矢径对于时间的一阶导数，其方向沿点 M 的切线方向。

加速度

在 Δt 时间间隔内，点的运动速度由 $\mathbf{v}(t)$ 改变为 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ ，速度的改变量为 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ ，则称 $\mathbf{a}^* = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 为点 M 在 Δt 内的平均加速度，其方向沿 $\Delta \mathbf{v}$ 的方向。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，平均加速度的极限值称为点在瞬时 t 的**加速度**（acceleration），即

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (1-3)$$

这表明，点的加速度等于其速度对于时间的一阶导数，也等于其矢径对于时间的二阶导数。点的加速度也是一个矢量。如果把不同瞬时点的速度矢量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \dots$ 平行移动到同一出发点 O_1 （任选），如图1-2(a)和(b)所示，这些速度矢量的末端将描绘出一条连续的曲线，称之为**速度矢端图**（hodograph of velocities），如图1-2(c)所示。

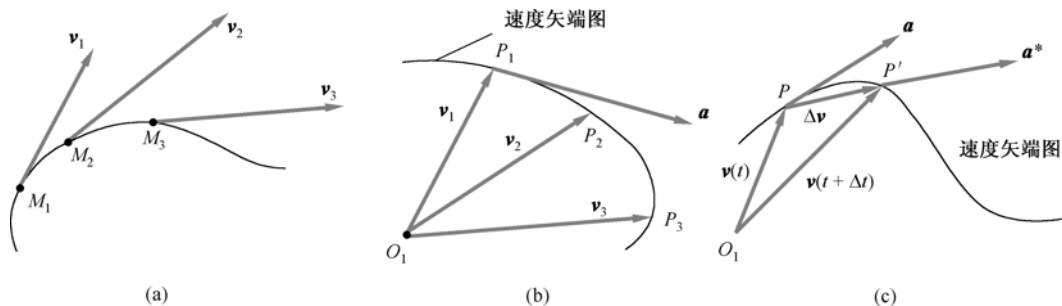


图 1-2 速度矢端图

1.1.2 直角坐标法

当点的运动轨迹未知时，常用直角坐标法描述点的运动规律。

运动方程

取直角坐标系 $Oxyz$ ，如图1-3所示。点 M 在运动过程中，其坐标 x, y, z 随时间变化。

矢径 \mathbf{r} 与直角坐标 x, y, z 有如下关系：

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-4)$$

由于 \mathbf{r} 为时间的单值连续函数，所以 x, y, z 也是时间的单值连续函数，即

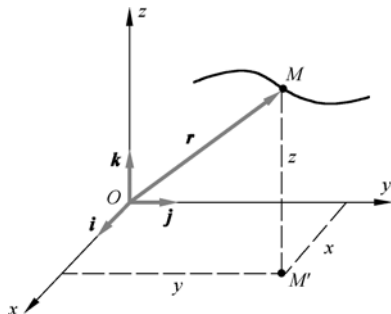


图 1-3 用直角坐标表示点的运动

$$x = f_1(t) = x(t), \quad y = f_2(t) = y(t), \quad z = f_3(t) = z(t)$$

上式是以时间 t 为参数的方程, 称为动点以直角坐标表示的运动方程。它确定了任意一个瞬时点 M 在空间的位置, 若消去参数 t , 则得到关于 x, y, z 的函数方程为

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1-5)$$

即为动点的轨迹方程。

速度

将式(1-4)代入式(1-2), 由于三个沿定坐标轴的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为常矢量, 故有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

设速度 \mathbf{v} 在直角坐标轴上的投影为 v_x, v_y, v_z , 分别表示沿 x, y, z 方向的速度分量, 则

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

所以, 可得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1-6)$$

因此, 速度在各直角坐标轴上的投影等于动点各对应坐标对时间的一阶导数, 其大小为

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

加速度

将式(1-6)代入式(1-3), 并设 a_x, a_y, a_z 为加速度在直角坐标轴上的投影, 则

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1-7)$$

且有

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

因此, 加速度在各直角坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的二阶导数, 其大小为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

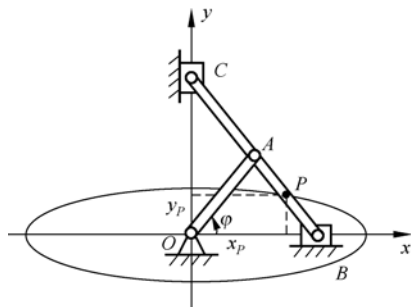
例题 1-1

椭圆规机构如例题图 1-1(a)所示。曲柄 OA 以等角速度 ω 绕 O 转动, 通过连杆 BC 带动滑块 B, C 在水平和铅垂槽内运动, $OA = AB = AC = l$ 。求:

- (1) 连杆上点 P ($BP = r$) 的运动方程;
- (2) 点 P 的速度与加速度。

分析: 由于点 P 在平面内的运动轨迹未知, 故建立如例题图 1-1(a)所示的直角坐标系 Oxy 来描述运动。

解:



例题图 1-1(a)

(1) 求点的运动方程。

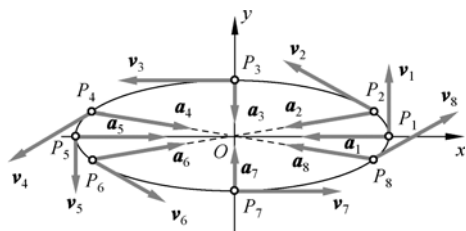
点 P 是连杆 BC 上的一点；该杆两端分别被限制在水平和铅垂方向运动；曲柄做等角速转动，且 $\varphi = \omega t$ 。由此，可写出点 P 的运动方程为

$$\begin{cases} x = (2L - r)\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

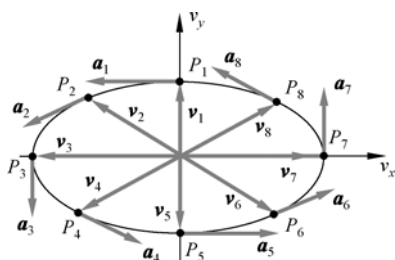
消去时间 t ，得轨迹方程为

$$\left(\frac{x}{2L-r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

这是一个椭圆方程，如例题图 1-1(b)所示。



例题图 1-1(b)



例题图 1-1(c)

(2) 求点的速度与加速度。

对运动方程求导，得

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -(2L-r)\omega\sin\omega t \\ v_y = \dot{y} = r\omega\cos\omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -(2L-r)\omega^2\cos\omega t \\ a_y = \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

讨论：

(1) 注意到前面求出的加速度分量式有

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 x \\ a_y = -\omega^2 y \end{cases}$$

因此有

$$\mathbf{a}_P = -\omega^2 \mathbf{r}$$

即 \mathbf{a}_P 永远指向点 O 。

(2) 画速度端图，由速度方程消去时间 t ，得

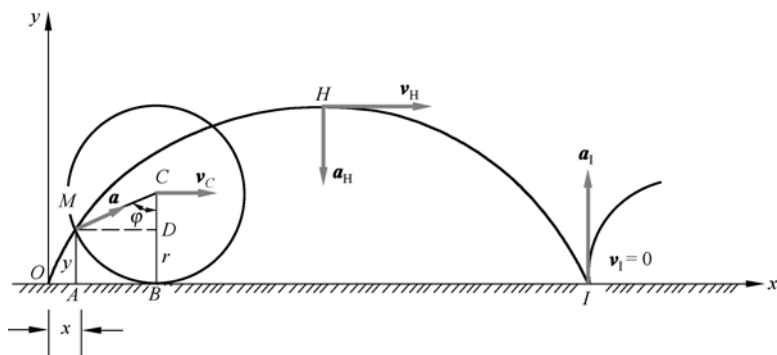
$$\left[\frac{v_x}{-(2L-r)\omega}\right]^2 + \left(\frac{v_y}{r\omega}\right)^2 = 1$$

这也是椭圆方程，如例题图 1-1(c)所示。可以看出，加速度沿速度矢量端图的切线方向，且知 $P_1 \rightarrow P_3$ 加速， $P_3 \rightarrow P_5$ 减速， $P_5 \rightarrow P_7$ 加速， $P_7 \rightarrow P_1$ 减速。

例题 1-2

半径为 r 的圆轮沿水平直线轨道滚动而不滑动（称为纯滚动），轮心 C 在与轨道平行的直线上运动。设轮心 C 的速度为一个常量 v_C ，试求轮缘上一点 M 的轨迹、速度和加速度。

分析：由于点 M 在平面内的运动轨迹未知，故建立如图 1-2 所示的直角坐标系 Oxy 来描述运动。



例题图 1-2

解：

取 $\varphi=0$ 时点 M 与直线轨道的接触点 O 为原点，建立直角坐标系 Oxy ，如例题图 1-2 所示。当轮子转过 φ 时，轮子与直线轨道的接触点为 B 。由于是纯滚动，故有

$$OB = MB = r\varphi$$

于是，用直角坐标表示的点 M 的运动方程为

$$\begin{cases} x = OB - CM \sin \varphi = r(\omega t - \sin \omega t) \\ y = CB - CM \cos \varphi = r(1 - \cos \omega t) \end{cases} \quad (a)$$

将式(a)对时间求导，即得点 M 的速度沿坐标轴的投影为

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = r\omega(1 - \cos \omega t) \\ v_y = \dot{y} = r\omega \sin \omega t \end{cases}$$

于是，点 M 的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \sqrt{2 - 2\cos \omega t} = 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

进一步，可得点 M 的加速度为

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = r\omega^2 \sin \omega t \\ a_y = \ddot{y} = r\omega^2 \cos \omega t \end{cases}$$

其大小为

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = r\omega^2$$

讨论：

(1) 运动方程式(a)实际上也是点 M 运动轨迹的参数方程(以 t 为参变量)，这是一个摆线(或称为旋轮线)方程。因此，点 M 的运动轨迹是摆线。

(2) 请读者分析当点 M 到达最高位置 H 时，以及当点 M 到达最低位置 I 时，其速度、加速度的大小和方向如何。

1.1.3 自然坐标法

在实际工程及现实生活中，动点的轨迹往往是已知的，如运行的列车、运转机器上的某一点等。此时，便可利用点的运动轨迹建立弧坐标及自然轴坐标系，并以此来描述和分析点的运动。

运动方程

设动点 M 沿已知轨迹运动，在曲线轨迹上任选一个参考点 O 作为原点，并设原点 O 的某一侧为正向，另一侧为负向，如图 1-4 所示，则点 M 在轨迹上任意一点瞬时的位置就可以用从点 O 沿轨迹所度量的弧长 \overline{OM} 加以正负号来确定。规定了正负号的弧长便称为点 M 的弧坐标(arc coordinate of a directed curve)，以 s 表示。显然，点 M 运动时弧坐标 s 是时间 t 的单值连续函数，即

$$s = f(t) \quad (1-8)$$

式(1-8)表示了动点沿已知轨迹的运动规律，称为动点以弧坐标表示的运动方程。

速度

如图 1-5 所示，设动点在瞬时 t 位于曲线上的点 M ，其弧坐标为 s ，经过时间间隔 Δt 后，动点运动到曲线的点 M' ，弧坐标的增量为 Δs ，其弧坐标为 $s' = s + \Delta s$ ，矢径的增量为 $\Delta \mathbf{r}$ 。根据式(1-2)，并注意到 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $\Delta s \rightarrow 0$ ，则动点的速度为

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \quad (a)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ (即点 M' 趋近于点 M) 时， $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1$ ，而 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向则趋近于轨迹在点 M 的切线

方向。若记切线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$ ，则有

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau}$$

其中， $\boldsymbol{\tau}$ 指向弧坐标 s 增加的方向，代入式(a)则可得动点的速度为

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} \quad (1-9)$$

式(1-9)表明，动点的速度是一个矢量，其大小 v 等于弧坐标对时间的一阶导数，方向沿曲线的切线方向，用单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 表示。

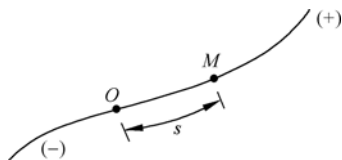


图 1-4 点运动的弧坐标

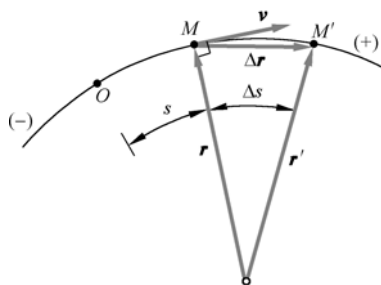


图 1-5 弧坐标下点的速度

加速度

将式(1-9)代入式(1-3)，得动点的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \quad (1-10)$$

由式(1-10)可知，速度矢的变化率由其大小（代数值 v ）的变化率和方向（单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ ）的变化率两部分组成。

若动点的轨迹为平面曲线，设在瞬时 t ，点 M 的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$ ，经时间间隔 Δt ，动点运动至点 M' ，该点的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}'$ ，如图 1-6(a)所示，切线方向转动了 $\Delta\phi$ 角，则在式(1-10)中

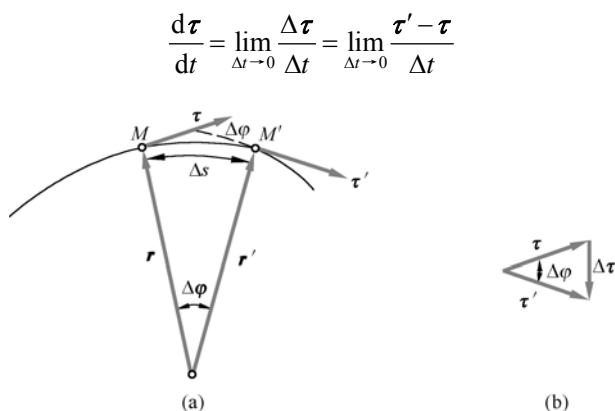


图 1-6 切向矢量对时间的变化率

由图 1-6(b)可知, $\Delta \boldsymbol{\tau}$ 的模为

$$|\Delta \boldsymbol{\tau}| = 2 \cdot |\boldsymbol{\tau}| \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \cdot \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \\ &= |v| \cdot \frac{1}{\rho} \cdot 1 = \frac{|v|}{\rho} \end{aligned}$$

式中, $\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$ 为轨迹在点 M 的曲率, ρ 为曲率半径。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta \boldsymbol{\tau}$ 的方向趋近于轨迹在点 M 的法线方向, 指向曲率中心。若记指向曲率中心的法线方向单位矢量为 \boldsymbol{n} , 则有

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho} \boldsymbol{n}$$

于是, 有

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{n} \quad (1-11)$$

式中, 右端第一项是反映速度大小变化的加速度, 记为 \boldsymbol{a}_τ ; 第二项是反映速度方向变化的加速度, 记为 \boldsymbol{a}_n 。因为

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} \quad (1-12)$$

是一个沿轨迹切线的矢量, 因此称为切向加速度 (tangential acceleration)。若 $\frac{dv}{dt} > 0$, 则 \boldsymbol{a}_τ 指向轨迹的正向; 若 $\frac{dv}{dt} < 0$, 则 \boldsymbol{a}_τ 指向轨迹的负向。令

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$$

则 a_τ 为一个代数量，是加速度 \mathbf{a} 沿轨迹切向的投影。

因为

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1-13)$$

是一个沿轨迹法线指向曲率中心的矢量，因此称为法向加速度（normal acceleration）。令

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

则 a_n 为一个代数量，是加速度 \mathbf{a} 沿轨迹法向的投影，如图 1-7 所示。由 \mathbf{a} 的两个正交分量 a_τ, a_n ，可求出 \mathbf{a} 的大小和方向为

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\ddot{s})^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \\ \tan \theta = \frac{|a_\tau|}{a_n} \end{cases}$$

式中， θ 为 (\mathbf{a}, \mathbf{n}) 的夹角。

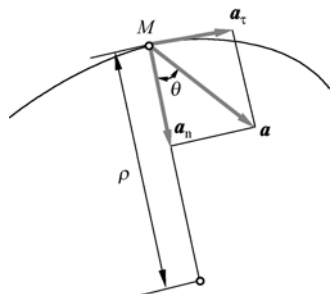


图 1-7 弧坐标下点的加速度

自然轴系

当运动轨迹为空间曲线时，弧坐标系中所得到的结论同样成立，只需将弧坐标系扩展为自然轴系。由于 $\frac{\Delta \boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$ 的极限位置位于点 M 与运动轨迹相切

的平面内 [如图 1-6(b)所示]，故这一个平面称为密切面（osculating plane）。通过点 M 可以作出相互垂直的三条直线：轨迹的切线（tangential）与主法线（normal）（二者均位于密切面内）及副法线（binormal）（垂直于密切面）。沿切线、主法线和副法线三个方向的单位矢量分别记为 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ 和 \mathbf{b} ，如图 1-8 所示。 $\boldsymbol{\tau}$ 指向弧坐标增加的方向； \mathbf{n} 指向曲率中心； \mathbf{b} 的方向由 $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ 确定。上述三条相互

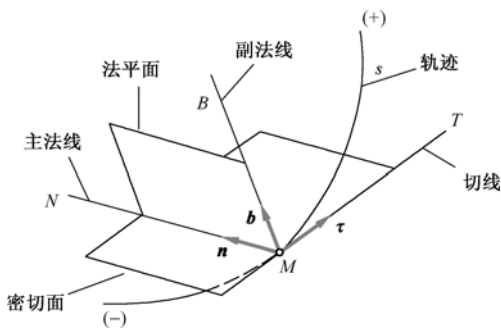


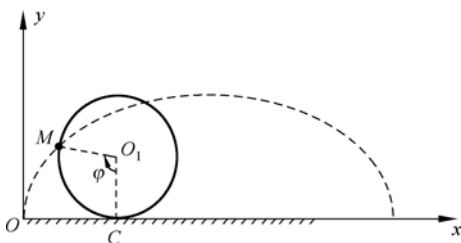
图 1-8 自然轴系

正交的轴线构成了随时间变化的直角坐标系，称为自然轴系（trihedral axes of a space curve）。前面关于速度和加速度的公式在自然轴系中均成立，其中加速度在副法线方向的投影恒为零。

例题 1-3

半径为 r 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动（即纯滚动），设轮子转角 $\varphi = \omega t$ （ ω 为常值），如例题图 1-3 所示。求用弧坐标表示的轮缘上任意一点 M 的运动方程，并求该点的速度、切向加速度及法向加速度。

分析：在例题 1-2 中，已经得到了在直角坐标系中点 M 的速度沿坐标轴的投影为



例题图 1-3

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = r\omega(1 - \cos\omega t) \\ v_y = \dot{y} = r\omega\sin\omega t \end{cases} \quad (\text{a})$$

以及点 M 的速度为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2} \quad (\text{b})$$

下面利用弧坐标法求轮缘上任意一点 M 的运动方程、速度、切向加速度及法向加速度。

解:

取 M 的起始点 O 作为弧坐标原点, 将式(b)的速度 v 对时间积分, 即得用弧坐标表示的运动方程为

$$s = \int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2} dt = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right), \quad (0 \leq \omega t \leq 2\pi)$$

再将式(a)对时间求导, 即得加速度在直角坐标系上的投影为

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = r\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = \ddot{y} = r\omega^2 \cos\omega t \end{cases}$$

由此, 得到全加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

将式(b)对时间求导, 即得点 M 的切向加速度为

$$a_\tau = \dot{v} = r\omega^2 \cos\frac{\omega \cdot t}{2}$$

和法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = r\omega^2 \sin\frac{\omega \cdot t}{2}$$

于是, 由 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 还可进一步求得轨迹的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4r^2\omega^2 \sin^2\frac{\omega t}{2}}{r\omega^2 \sin\frac{\omega t}{2}} = 4r\sin\frac{\omega t}{2}$$

讨论:

请考虑一种特殊情况, 即当 $t = 2\pi/\omega$ 时, $\varphi = 2\pi$, 这时点 M 运动到与地面相接触的位置。由式(b)可知, 此时点 M 的速度为零, 这表明沿地面做纯滚动的轮子与地面接触点的速度为零。另一方面, 由于点 M 全加速度的大小恒为 $r\omega^2$, 因此纯滚动的轮子与地面接触点的速度虽然为零, 但加速度却不为零。于是, 可得

$$a_x = 0, \quad a_y = r\omega^2$$

即接触点的加速度方向向上。

1.2 刚体的平动

刚体的平动和定轴转动是刚体的两种最简单、最基本的运动，它们是日常生活及工程中很常见的运动，也是研究刚体复杂运动的基础。

刚体平动的定义

刚体在运动过程中，若其上任意一条直线始终与其初始位置保持平行，则称这种运动为刚体的平行移动，简称平移或平动。如电梯的升降运动、在直线轨道上行驶的列车车厢的运动，以及如图 1-9 所示的摆式筛砂机筛子 AB 的运动。

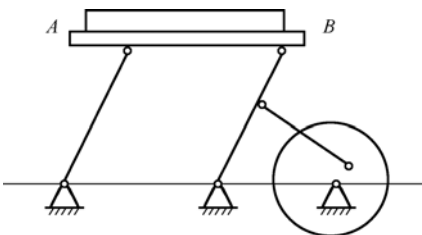


图 1-9 摆式筛砂机

刚体平动的运动特点

在平移刚体内任意选两点 A 、 B （如图 1-10 所示），令点 A 、 B 的矢径分别为 \mathbf{r}_A 和 \mathbf{r}_B ，则两矢端图就是这两点的轨迹。根据图中的几何关系，有

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{BA}$$

根据平移的定义， \mathbf{r}_{BA} 为常矢量，即有 $\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = 0$ ，所以

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B$$

即

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \tag{1-14}$$

类似地，有 $\dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_B$ ，即

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B \tag{1-15}$$

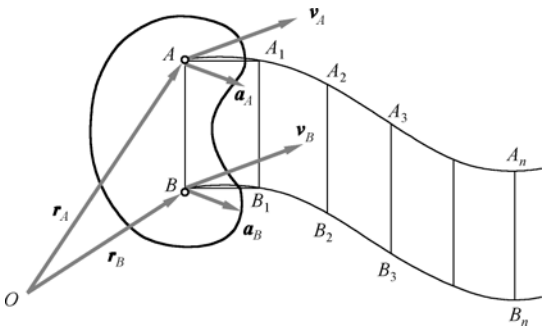


图 1-10 刚体的平动

式(1-14)和式(1-15)表明，平移时，在同一瞬时，刚体上各点的速度相同，各点的加速度也相同。因此，刚体平移时，可以用刚体上任意一点（如质心）的运动表示刚体的运动。于是，研究平移刚体的运动可归结为研究点的运动。

例题 1-4

搅拌机由主动轴 O_1 同时带动齿轮 O_2 和 O_3 转动，搅杆 ABC 用销钉 A 和销钉 B 与齿轮 O_2 和齿轮 O_3 相连。若已知主动轮转动角速度为 $n=950 \text{ r/min}$ ， $AB=O_2O_3$ ， $O_2A=O_3B=r=25 \text{ cm}$ ，各齿轮的齿数如例题图 1-4 所示。求搅杆端点 C 的速度和轨迹。

分析：由题意可知构件 ABC 做平动，根据刚体平动的运动特点，只要求得点 A 或点 B 的速度和轨迹，即可知搅杆端点 C 的速度和轨迹。

解：

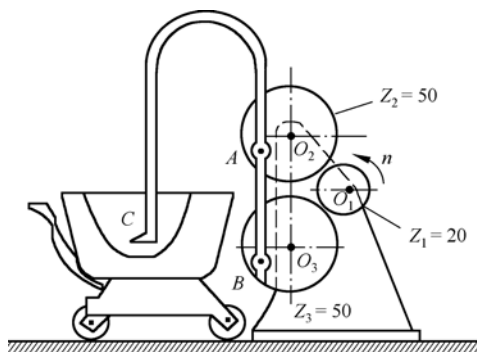
由于 $Z_2=Z_3$ ，所以齿轮 O_2 与齿轮 O_3 的角速度大小相等，方向相同，即 $\omega_{O_2}=\omega_{O_3}$ ，因而， $v_A=v_B=v_C$ ；

又知搅杆做平动，其上各点的轨迹形状、速度均相同，故点 C 的轨迹是半径为 r 的圆，则

$$\omega_{O_1}=950 \times \frac{2\pi}{60}=99.48 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{O_2}=\frac{Z_1}{Z_2}\omega_{O_1}=\frac{20}{50} \times 99.48=39.79 \text{ rad/s}$$

$$v_C=r\omega_{O_2}=0.25 \times 39.79=9.95 \text{ m/s}$$



例题图 1-4

讨论：

(1) 在工程实践中正确判断物体的运动形式是非常重要的，它是对物体进行运动分析的首要内容。注意，不能把物体的整体运动与物体上点的运动混淆，物体的整体运动是由其上各点的运动构成的。本例题中，搅拌机上 A 和 B 两点及其他各点的轨迹都是圆，但杆整体并不做圆周运动或转动，而是做平动。

(2) 请读者思考点 C 轨迹的圆心在何处？

1.3 刚体绕定轴的转动

刚体定轴转动的定义

刚体在运动过程中，当其上有且只有一条直线始终固定不动时，称刚体绕定轴转动，该固定直线称为轴线或转轴（图 1-11 中 z 轴即为转轴）。

刚体定轴转动的运动方程

设有一个刚体 T 相对于参考系绕固定轴 z 转动，如图 1-11 所示。为了描述整个刚体的运动，首先要确定刚体在任意一个瞬时的位置。为此，通过固定轴 z 作一个固定平面 Q ，再选一个与刚体固连的平面 P 。由于刚体上各点相对于平面 P 的位置是一定的，因此，只要知道平面 P 的位置，也就知道了刚体上各点的位置，即整个刚体的位置。而平面 P 在任意一个瞬时 t 的位置可由它与固定平面 Q 的夹角 φ 来确

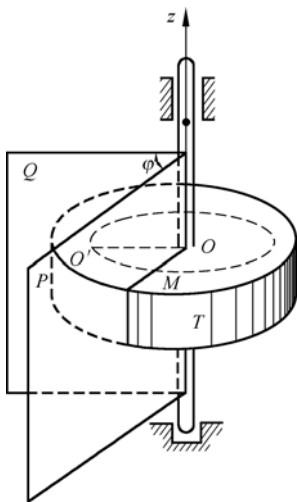


图 1-11 刚体的定轴转动

定, 称为位置角 (angle of position) 或转角, 其单位为弧度。规定从平面 Q 到平面 P , 若从 z 轴的正向朝负向看去为逆时针转向, 则 φ 为正值, 反之为负值。当刚体转动时, 位置角 φ 随时间 t 变化, 是时间 t 的单值连续函数, 可表示为

$$\varphi = f(t) \quad (1-16)$$

式(1-16)称为刚体的转动方程, 它反映了刚体绕定轴转动的规律。如果已知函数 $f(t)$, 则刚体任意一个瞬时的位置即可以确定。

刚体定轴转动的角速度

为了度量刚体转动的快慢和转动方向, 引入角速度 (angular velocity) 的概念。设在时间间隔 Δt 内, 刚体转角的改变量为 $\Delta\varphi$, 则刚体的瞬时角速度定义为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (1-17)$$

即刚体的角速度等于转角对时间的一阶导数。

刚体定轴转动的角速度是一个代数量, 其正负号分别对应于刚体沿转角 φ 增大或减小的方向转动。角速度的单位是弧度/秒 (rad/s)。在工程中很多情况下还用转速 n (单位为 r/min) 来表示刚体转动速度。此时, ω 与 n 之间的换算关系为

$$\omega = \frac{2n\pi}{60} = \frac{n\pi}{30} \quad (1-18)$$

刚体定轴转动的角加速度

为了度量角速度变化的快慢和转向, 引入角加速度 (angular acceleration) 的概念。设在时间间隔 Δt 内, 转动刚体角速度的变化量为 $\Delta\omega$, 则刚体的瞬时角加速度定义为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (1-19)$$

即刚体的角加速度等于角速度对时间的一阶导数, 也等于转角对时间的二阶导数。角加速度 α 的单位为弧度/秒² (rad/s²)。

定轴转动刚体上各点的运动

设刚体绕轴 O 转动, 角速度为 ω , 角加速度为 α , 现讨论刚体上任意点 M 的运动, 如图 1-12 所示。以 OO' 为基准线, φ 角逆时针为正。以 O' 为原点建立点 M 的弧坐标, 则

$$s = R\varphi$$

所以, 点 M 的速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad (1-20)$$

这表明, 某瞬时转动刚体内任意一点的速度大小等于该点的转动半径与该瞬时刚体角速度的乘积, 速度方向沿着圆周的切线方向, 指向与刚体的转动方向相同。

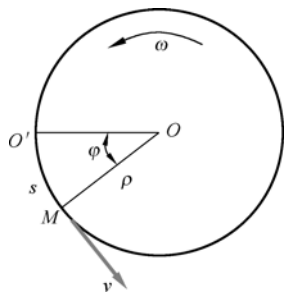


图 1-12 定轴转动刚体上点的运动

进一步地, 点 M 的切向加速度和法向加速度分别为

$$\begin{cases} a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\omega)^2}{\rho} = r\omega^2 \end{cases}$$

上述结果表明, 转动刚体上任意一点切向加速度的大小等于该点的转动半径与该瞬时刚体角加速度的乘积, 方向与转动半径垂直, 指向与角加速度的转向一致; 法向加速度的大小等于该点的转动半径与该瞬时刚体角速度平方的乘积, 方向指向转动中心。

于是, 刚体上任意一点 M 的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

方向为

$$\tan \theta = \frac{|a_{\tau}|}{a_n} = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

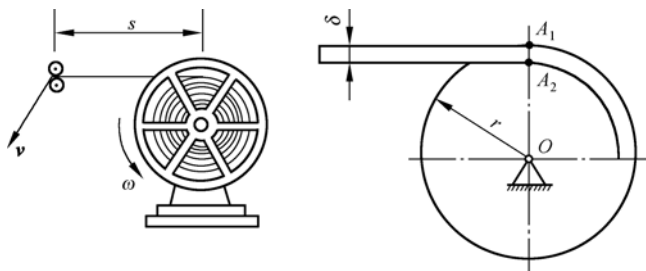
式中, θ 为切向加速度与法向加速度的夹角。

由上, 刚体上任意一点 M 的加速度矢量可以表示为

$$\mathbf{a} = a_{\tau}\boldsymbol{\tau} + a_n\mathbf{n} = r\alpha\boldsymbol{\tau} + r\omega^2\mathbf{n}$$

例题 1-5

电影胶片以恒速 v 从卷盘中拉出, 从而带动卷盘与尚未拉出的胶片一起做绕固定轴的转动, 如例题图 1-5 所示。若胶片的厚度为 δ , 正滚动着的胶片的半径为 r , 试求卷盘的角加速度 α 。设 δ 与 r 相比很小。



例题图 1-5

分析: 随着胶片被拉出, 胶片的半径不断变化, 其变化速度为每转一周减小一个胶片的厚度 δ 。拉出速度 v 、胶片半径 r 和卷盘的角速度之间满足式(1-20), 由此关系可求角加速度。

解:

由刚体绕定轴转动的速度公式, 得

$$v = r\omega \quad (\text{a})$$

将其对时间 t 求导, 且考虑到 $v = \text{常量}$, 有

$$0 = \frac{d\omega}{dt}r + \omega \frac{dr}{dt}$$

所以

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{r} \frac{dr}{dt} \quad (\text{b})$$

设卷盘中的胶片的初始半径为 r_0 。显然，这些胶片每转一周，其半径 r 就减小一个胶片的厚度，当卷盘转过 φ 角时，半径 r 为

$$r = r_0 - \delta \frac{\varphi}{2\pi}$$

对时间求导，得

$$\frac{dr}{dt} = -\delta \frac{\dot{\varphi}}{2\pi} = -\delta \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{c})$$

将式(c)代入式(b)中，并考虑到式(a)，有

$$\alpha = \frac{v^2 \delta}{2\pi r^3}$$

用矢量积表示点的速度与加速度

研究图 1-13(a)所示的刚体定轴转动，其中，轴 Oz 为刚体的转动轴。设转轴 Oz 的单位矢量为 \mathbf{k} ，则刚体角速度与角加速度可以分别表示为矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ ，即

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \quad (1-21a)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{k} = \dot{\omega} \mathbf{k} \quad (1-21b)$$

分别称为角速度矢量和角加速度矢量，如图 1-13(b)所示。用右手螺旋法确定角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向，如图 1-13(c)所示。当 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha} > 0$ 时，两者同向，刚体做加速转动；当 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha} < 0$ 时，两者反向，刚体做减速转动。

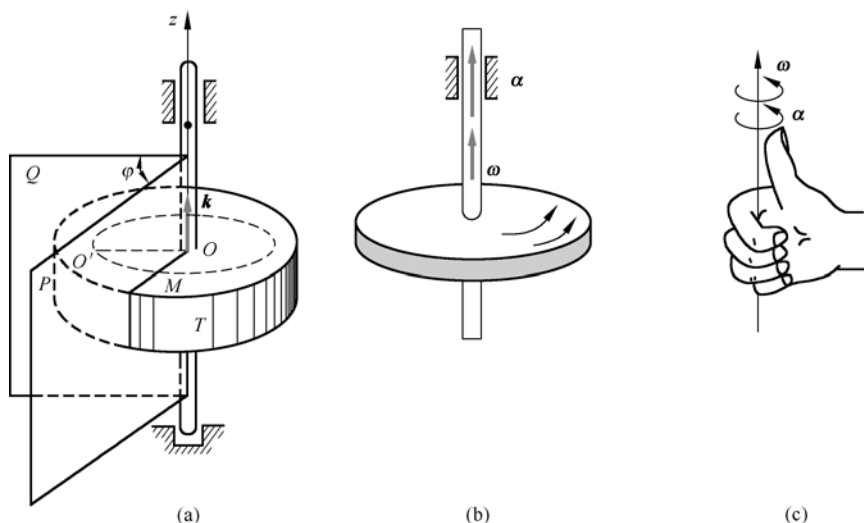


图 1-13 角速度和角加速度的矢量表示

将角速度与角加速度分别用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示后, 则转动刚体上任意一点 M 的速度、切向加速度和法向加速度都可以用矢量积来表示, 如图 1-14 所示。其中, 速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (1-22)$$

大小为 $|\boldsymbol{v}| = \omega \cdot r \sin \theta = \omega \rho$; 方向由右手螺旋法则确定。可见, 矢量积 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 的方向正是速度矢量 \boldsymbol{v} 的方向。

加速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \quad (1-23)$$

式中

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}^{\tau}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}^n$$

下面考察固连在刚体上的动系 $O'x'y'z'$ 的单位矢量 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, 如图 1-15 所示。记其端点分别为 M_1, M_2, M_3 , 由式(1-21)可得

$$\boldsymbol{v}_{M1} = \frac{d\boldsymbol{i}'}{dt}, \boldsymbol{v}_{M2} = \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt}, \boldsymbol{v}_{M3} = \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}$$

所以

$$\boldsymbol{v}_{M1} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}', \boldsymbol{v}_{M2} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}', \boldsymbol{v}_{M3} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'$$

于是, 得

$$\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}', \quad \frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}', \quad \frac{d\boldsymbol{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}' \quad (1-24)$$

式(1-24)称为泊松公式。

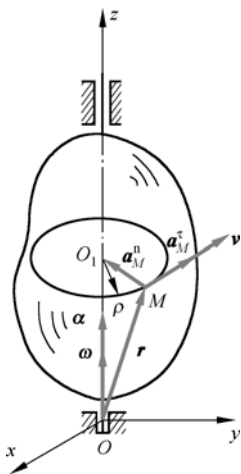


图 1-14 速度与加速度矢量

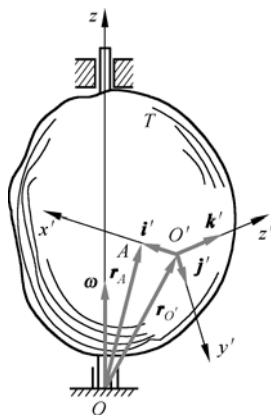


图 1-15 泊松公式

本章小结

(1) 点的运动方程描述动点在空间的几何位置随时间的变化规律。对于不同的坐标系，将有不同的形式。即

矢量形式： $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

直角坐标形式： $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

弧坐标形式： $s = s(t)$

(2) 点的速度是个矢量，它反映点的运动快慢和方向。即

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (\text{直角坐标}) \\ &= v\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} \quad (\text{弧坐标})\end{aligned}$$

(3) 点的加速度是个矢量，它反映速度大小和方向随时间的变化率。即

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{矢量式}) \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (\text{直角坐标}) \\ &= a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\mathbf{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \quad (\text{弧坐标})\end{aligned}$$

(4) 刚体的平动和定轴转动称为刚体的基本运动。它不可分解，是刚体运动的最简单形态，刚体的复杂运动均可分解成若干基本运动的合成。平动刚体上各点的轨迹形状相同。同一瞬时刚体上各点的速度 \mathbf{v} 和加速度 \mathbf{a} 相同。因此，可以用刚体上任意一点的运动代表整体。换言之，若知道平动刚体上某点的运动（ \mathbf{v}, \mathbf{a} 等），则其他各点均为已知。

(5) 刚体绕定轴转动。

① 用角坐标 φ 确定定轴转动刚体的位置，因此其运动方程为

$$\varphi = f(t) = \varphi(t)$$

② 转动刚体上各点的速度为

$$v = R\omega$$

③ 转动刚体上各点的加速度为

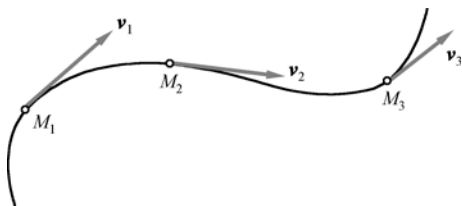
$$a_\tau = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

④ 定轴转动刚体上点的速度、加速度矢量表示法为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} = \dot{\varphi} \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{k} = \ddot{\varphi} \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

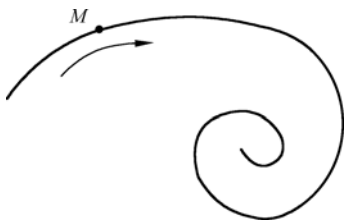
思考题

- 1-1 $\frac{dv}{dt}$ 和 $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ 和 $\frac{dr}{dt}$ 是否相同?
- 1-2 试分析在什么情况下 $\left| \frac{dr}{dt} \right| \neq \frac{d|r|}{dt}$, $\left| \frac{dv}{dt} \right| \neq \frac{d|v|}{dt}$? 在什么情况下又相等? 并各举例说明。
- 1-3 点做曲线运动, 如思考题图 1-3 所示。试就以下三种情况画出加速度的大致方向:
- (1) 在 M_1 处做匀速运动;
 - (2) 在 M_2 处做加速运动;
 - (3) 在 M_3 处做减速运动。



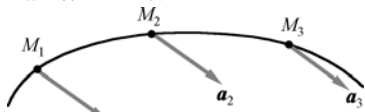
思考题图 1-3

- 1-4 点 M 沿螺线自外向内运动, 如思考题图 1-4 所示。它走过的弧长与时间的一次方成正比。问点的加速度是越来越大, 还是越来越小? 该点越跑越快, 还是越跑越慢?



思考题图 1-4

- 1-5 在什么情况下, 点的切向加速度等于零? 在什么情况下, 点的法向加速度等于零? 在什么情况下, 两者都等于零?
- 1-6 当点做曲线运动时, 如果点的加速度 a 是恒矢量, 如思考题图 1-6 所示, 问点是否做匀变速运动?



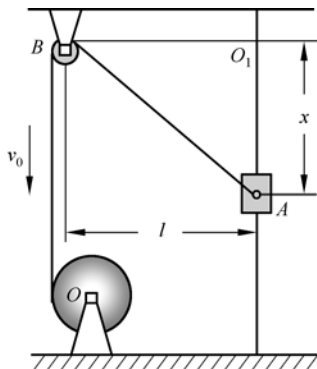
思考题图 1-6

- 1-7 点做曲线运动, 下述说法是否正确:
- (1) 若切向加速度为正, 则点做加速运动;
 - (2) 若切向加速度与速度符号相同, 则点做加速运动;
 - (3) 若切向加速度为零, 则速度为常矢量。

习题

基本题

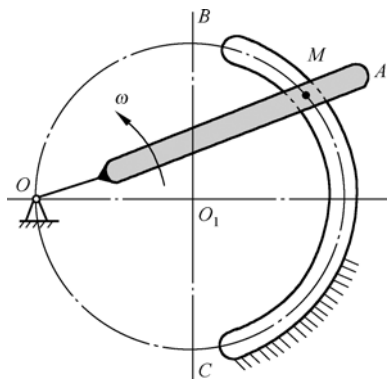
- 1-1 套管 A 由绕过定滑轮 B 的绳索牵引而沿铅垂导轨上升, 滑轮中心到导轨的距离为 l , 如习题图 1-1 所示。设绳索以等速 v_0 拉下, 忽略滑轮尺寸。求套管 A 的速度, 以及加速度与距离 x 的关系式。
- 1-2 如习题图 1-2 所示, 摇杆滑道机构中的滑块 M 同时在固定的圆弧槽 BC 和摇杆 OA 的滑道中滑动。若弧 BC 的半径为 R , 摇杆 OA 的轴 O 在弧 BC 的圆周上, 摇杆绕 O 轴以角速度 ω 转动, 当运动开始时, 摇杆在水平位置。试分别用直角坐标法和自然法给出点 M 的运动方程, 并求其速度和加速度。



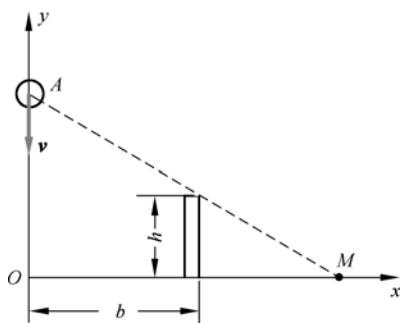
习题图 1-1

- 1-3 如习题图 1-3 所示, 光源 A 以等速 v 沿铅直线下落。桌子上有一个高为 h 的立柱, 它与上述铅直线的距离为 b 。试求该柱上端的影

子 M 沿桌面移动的速度和加速度的大小(将它们表示为光源高度 y 的函数)。

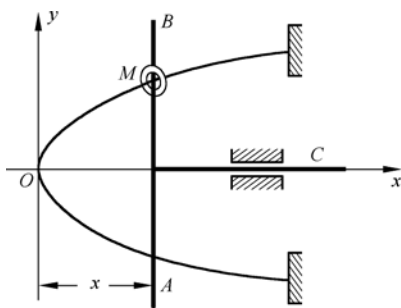


习题图 1-2



习题图 1-3

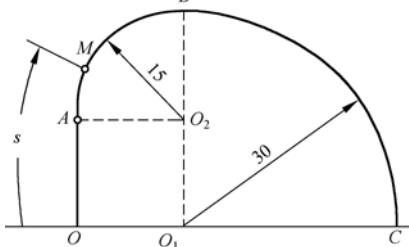
- 1-4 小环 M 由做平动的丁字形杆 ABC 带动, 沿着习题图 1-4 所示的曲线轨道运动。设杆 ABC 的速度 $\dot{x}=v=\text{常数}$, 曲线方程为 $y^2=2px$ 。试求环 M 的速度和加速度的大小(写成杆的位移 x 的函数)。



习题图 1-4

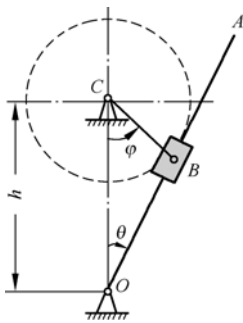
- 1-5 如习题图 1-5 所示, 动点 M 沿轨道 $OABC$ 运动, OA 段为直线, AB 段和 BC 段分别为四分之一圆弧。已知点 M 的运动方程为

$s = 30t + 5t^2 \text{ m}$, 求 $t = 0, 1, 2 \text{ s}$ 时点 M 的加速度。



习题图 1-5

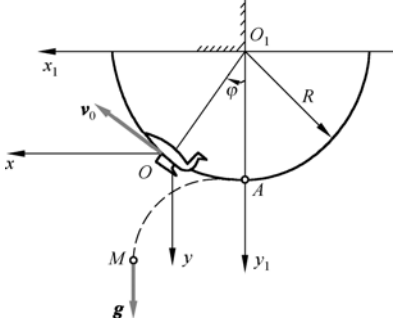
- 1-6 如习题图 1-6 所示, 曲柄 CB 以等角速度 ω_0 绕轴 C 转动, 其转动方程为 $\varphi = \omega_0 t$ 。滑块 B 带动摇杆 OA 绕轴 O 转动。设 $OC = h$, $CB = r$ 。求摇杆的转动方程。



习题图 1-6

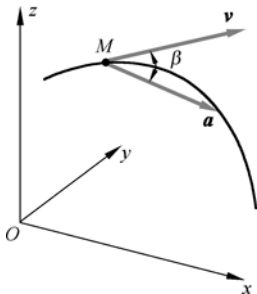
提高题

- 1-7 如习题图 1-7 所示, 飞机在铅垂面内以不变的速率 v_0 沿半径为 R 的圆弧运动, 当飞机位于点 A 的时候, 点 M 从飞机上分离出来, 以恒定的加速度 g 相对于静止坐标系 $O_1x_1y_1$ 运动。设原点 O 固结于飞机的坐标系 Oxy 与定坐标系 $O_1x_1y_1$ 的轴始终彼此平行。求在动坐标系 Oxy 中看到的点 M 的加速度与角 φ 的关系。



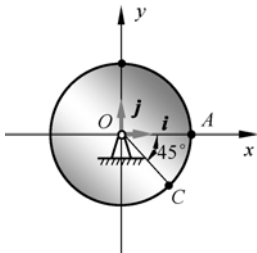
习题图 1-7

1-8 如习题图 1-8 所示, 沿空间曲线运动的点在 M 处的速度为 $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, 加速度 \mathbf{a} 与速度 \mathbf{v} 的夹角 $\beta = 30^\circ$, 且 $a = 10 \text{ m/s}^2$ 。试计算轨迹在该点密切面内的曲率半径 ρ 和切向加速度 a_t 。



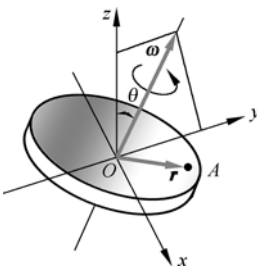
习题图 1-8

1-9 半径 $R = 100 \text{ mm}$ 的圆盘绕其圆心转动, 在习题图 1-9 所示瞬时, 点 A 的速度为 $\mathbf{v}_A = 200\mathbf{j} \text{ mm/s}$, 点 B 的切向加速度 $\mathbf{a}_B^t = 150\mathbf{i} \text{ mm/s}^2$ 。试求角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速 $\boldsymbol{\alpha}$, 并进一步写出点 C 的加速度的矢量表达式。



习题图 1-9

1-10 圆盘以恒定的角速度 $\omega = 40 \text{ rad/s}$ 绕垂直于盘面的中心轴转动, 该轴在 $y-z$ 面内, 倾斜角 $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ 。点 A 的矢径在习题图 1-10 所示瞬时为 $\mathbf{r} = 150\mathbf{i} + 160\mathbf{j} - 120\mathbf{k} \text{ mm}$ 。求点 A 的速度和加速度的矢量表达式, 并用 $\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{a}_n = R\omega^2$ 检验所得结果是否正确。

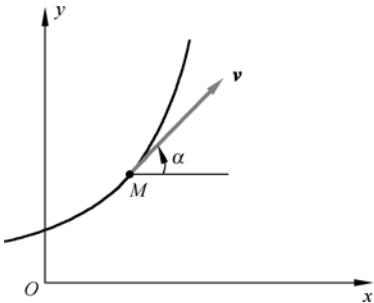


习题图 1-10

1-11 设动点沿平面曲线轨迹运动, 如习题图 1-11 所示。求证: 此轨迹的曲率半径可由下式确定

$$\rho = \frac{v}{|\dot{\alpha}|}$$

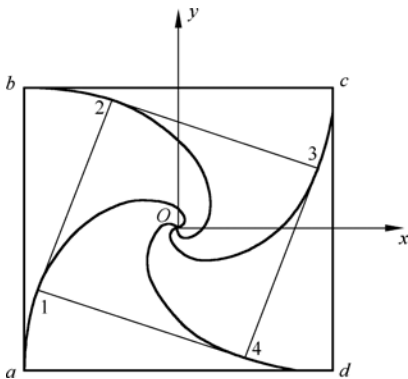
式中, v 是动点的速率, $|\dot{\alpha}|$ 是轨迹切线与 x 轴的夹角对时间的变化率绝对值。对于曲线 $y = e^x$, 写出 ρ 与 α 的关系。



习题图 1-11

研究性题目

1-12 如习题图 1-12 所示, 在边长为 L 的正方形的四个顶点 a, b, c, d 上有四条狗, 在 $t = 0$ 时刻开始按顺时针方向依次紧盯追逐, 即 a 追 b, b 追 c, c 追 d, d 追 a 。在追逐过程中, 四条狗的速率保持不变, 始终为 v 。求四条狗最终追赶到一起所经历的时间 t 。



习题图 1-12

在不同的参考系中，对于同一动点，其运动方程、速度和加速度是不相同的，这就是运动的相对性。在许多力学问题中，常常需要研究不同参考系中同一运动学参量（运动方程、速度或加速度）之间的相互关系。本章将采用定、动两种参考系，描述同一动点的运动；分析两种结果之间的相互关系，建立点的速度合成定理和加速度合成定理。

2.1 绝对运动、相对运动和牵连运动

三个研究对象——动点、动系和定系

在一般工程问题中，当所研究的问题涉及两个参考系时，通常将固连在地球或相对地球不动的物体上的坐标系，称为定参考系（fixed reference system），简称定系，以 $Oxyz$ 坐标系表示；将固定在其他相对于地球运动的参考体上的坐标系，称为动参考系（moving reference system），简称动系，以 $O'x'y'z'$ 坐标系表示。动点是指相对于定系和动系均有运动的点。因此，点的合成运动中的三个研究对象是动点、动参考系和定参考系。

例如，如图 2-1 所示，可以选取直升机主旋翼上的点 A 为动点，将动系 $O'x'y'z'$ 固定在直升飞机机身上，将定系 $Oxyz$ 固定在地面。

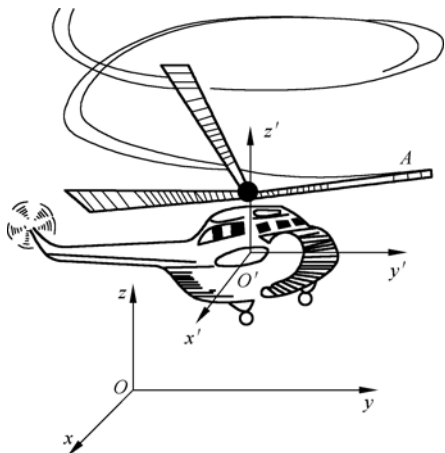


图 2-1 动参考系和定参考系

三种运动形式——绝对运动、相对运动和牵连运动

确定动系与定系后，将动点（研究对象）相对于定系的运动，称为动点的绝对运动（absolute motion）；动点相对于动系 $O'x'y'z'$ 的运动，称为动点的相对运动（relative motion）；动系 $O'x'y'z'$

相对于定系 $Oxyz$ 的运动，称为**牵连运动** (convected motion)。由于动系作为一个整体运动，因此牵连运动具有刚体运动的特点，如平动或定轴转动。基于这一考虑，所以常选的动系多为平动动系或定轴转动动系，因此常见的牵连运动形式即为平动或定轴转动。

在图 2-1 中，将固定在地面上的坐标系 $Oxyz$ 作为定系，将随机身一起运动的坐标系 $O'x'y'z'$ 作为动系，则主旋翼上的点 A 相对于地面的运动是绝对运动，点 A 相对于机身的运动为相对运动，机身相对于地面的运动为牵连运动。

动点在绝对运动中的轨迹、位移、速度和加速度，就是站在定坐标系中的观察者所观测到的动点的轨迹、位移、速度和加速度，分别称为动点的**绝对轨迹** (absolute trajectory)、**绝对位移** (absolute displacement)、**绝对速度** (absolute velocity) 和**绝对加速度** (absolute acceleration)。动点在相对运动中的轨迹、位移、速度和加速度，就是站在动坐标系中的观察者所观测到的动点的轨迹、位移、速度和加速度，分别称为动点的**相对轨迹** (relative trajectory)、**相对位移** (relative displacement)、**相对速度** (relative velocity) 和**相对加速度** (relative acceleration)。动点的绝对速度和绝对加速度，分别用符号 \mathbf{v}_a 和 \mathbf{a}_a 表示；动点的相对速度和相对加速度，分别用符号 \mathbf{v}_r 和 \mathbf{a}_r 表示。

由于动系的运动是刚体运动，故除了动系做平动的情况外，其上各点的运动都不尽相同。只有在某瞬时动系上与动点相重合的那一点的运动，与动点的运动有直接的联系。通常称该点为动点的**牵连点** (convected point)，将牵连点的速度和加速度定义为动点在该瞬时的**牵连速度** (convected velocity) 和**牵连加速度** (convected acceleration)，分别用符号 \mathbf{v}_e 和 \mathbf{a}_e 表示 (\mathbf{v}_e 的下角标 e 为法文 entraînement 的首字母)。

2.2 点的运动方程合成——三种运动方程间的关系

本节分析三种运动——绝对运动、相对运动和牵连运动之间的关系。一般来说，若已知动系运动（即牵连运动）的规律，则可以通过坐标变换来建立点在定系中的坐标（或矢径）与在动系中的坐标（或矢径）的关系。如图 2-2 所示，定系为 $O_1x_1y_1z_1$ ，沿其坐标轴的单位矢量分别为 $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ ；动系为 $O_2x_2y_2z_2$ ，沿其坐标轴的单位矢量分别为 $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ 。 \mathbf{r}_1 为绝对运动的矢径， \mathbf{r}_2 为相对运动的矢径。

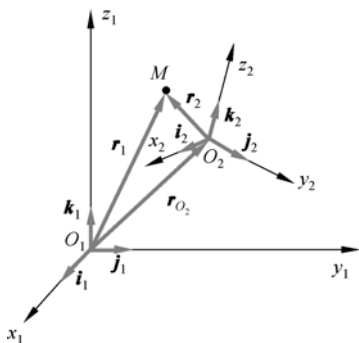


图 2-2 定系与动系中矢径的关系

由图 2-2 可知

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{O_2} + \mathbf{r}_2$$

因为

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2$$

所以

$$x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 = x_{O_2} \mathbf{i}_1 + y_{O_2} \mathbf{j}_1 + z_{O_2} \mathbf{k}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2$$

即

$$(x_1 - x_{O_2}) \mathbf{i}_1 + (y_1 - y_{O_2}) \mathbf{j}_1 + (z_1 - z_{O_2}) \mathbf{k}_1 = x_2 \mathbf{i}_2 + y_2 \mathbf{j}_2 + z_2 \mathbf{k}_2$$

将上式两边依次点乘 $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, 可得

$$\begin{aligned} x_1 - x_{O_2} &= x_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 + y_2 \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1 + z_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1 \\ y_1 - y_{O_2} &= x_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1 + y_2 \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1 + z_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1 \\ z_1 - z_{O_2} &= x_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1 + y_2 \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1 + z_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

将上式写成矩阵的形式为

$$\begin{Bmatrix} x_1 - x_{O_2} \\ y_1 - y_{O_2} \\ z_1 - z_{O_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

若记

$$C_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}$$

则式(2-1)为

$$\begin{Bmatrix} x_1 - x_{O_2} \\ y_1 - y_{O_2} \\ z_1 - z_{O_2} \end{Bmatrix} = C_{12} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$$

式中, C_{12} 称为变换矩阵 (transformation matrix)。特殊地, 若动系与定系的坐标原点重合, 则有

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

二维情况的简化

对于二维问题, 其定系为 Oxy , 动系为 $O'x'y'$, 动点为 M , 如图 2-3 所示。其变换矩阵为

$$C_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

若绝对运动方程为

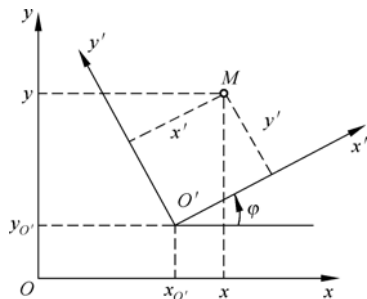


图 2-3 二维情况

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

相对运动方程为

$$x' = x'(t), \quad y' = y'(t)$$

牵连运动的方程为

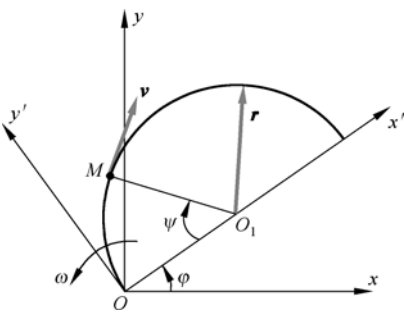
$$x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

则不难得到三种运动方程间的关系为

$$\begin{cases} x(t) = x_{O'}(t) + x'(t)\cos\varphi - y'(t)\sin\varphi \\ y(t) = y_{O'}(t) + x'(t)\sin\varphi + y'(t)\cos\varphi \end{cases}$$

例题 2-1

点 M 相对于动系 $Ox'y'$ 沿半径为 r 的圆周以速度 v 做匀速圆周运动(圆心为 O_1)，动系 $Ox'y'$ 相对于定系 Oxy 以匀角速度 ω 绕点 O 做定轴转动，如例题图2-1所示。初始时 $Ox'y'$ 与 Oxy 重合，点 M 与 O 重合。已知 $OO_1 = r$ ，试求点 M 的绝对运动方程。



例题图 2-1

分析：本题是已知点 M 的相对运动方程，求点 M 的绝对运动方程。为此，只要利用式(2-1)写出上述两种运动方程之间的关系即可。

解：

点 M 的绝对运动方程与相对运动方程满足如下关系：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

连接 O_1M ，由图可知： $\psi = \frac{vt}{r}$ 。于是，得点 M 的相对运动方程为

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} OO_1 - O_1M \cos\psi \\ O_1M \sin\psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \\ r \sin \frac{vt}{r} \end{Bmatrix}$$

牵连运动的方程为

$$x_{O'} = x_O = 0, \quad y_{O'} = y_O = 0, \quad \varphi = \omega t$$

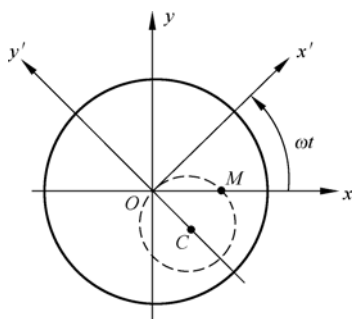
利用坐标变换关系式(a)，可得点 M 的绝对运动方程为

$$x = r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \cos \omega t - r \sin \frac{vt}{r} \sin \omega t$$

$$y = r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \sin \omega t + r \sin \frac{vt}{r} \cos \omega t$$

例题 2-2

用车刀切削工件的端面，车刀刀尖 M 沿水平轴 x 做往复运动，如例题图 2-2 所示。设 Oxy 为定坐标系，刀尖的运动方程为 $x = b \sin \omega t$ 。工件以等角速度 ω 逆时针方向转动。求车刀在工件圆端面上切出的痕迹。



例题图 2-2

分析：本题是已知车刀刀尖的绝对运动方程，求刀尖 M 相对于工件的轨迹方程。

解：

车刀刀尖的绝对运动方程和相对运动方程间的坐标变换关系为

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

取刀尖 M 为动点，动系固定在工件上，则动点 M 在动系 $Ox'y'$ 和定系 Oxy 中的坐标关系为

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \cos \omega t \\ -x \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

将点 M 的绝对运动方程 $(x, y) = (b \sin \omega t, 0)$ 代入式(a)中，得

$$\begin{cases} x' = b \sin \omega t \cos \omega t = \frac{b}{2} \sin 2\omega t \\ y' = -b \sin^2 \omega t = -\frac{b}{2} (1 - \cos 2\omega t) \end{cases}$$

上式即为车刀相对于工件的运动方程。

从上式中消去时间 t ，得刀尖的相对运动轨迹方程为

$$(x')^2 + \left(y' + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

可见，车刀在工件上切出的痕迹是一个半径为 $\frac{b}{2}$ 的圆，该圆的圆心 C 在动坐标轴 Oy' 上，圆周通过工件的中心 O ，如例题图 2-2 中的虚线所示。

2.3 点的速度合成定理——三种运动速度间的关系

本节进一步分析三种运动速度——绝对速度、相对速度与牵连速度之间的关系。如图 2-6 所示，点 M 为动点，动系为 $O'x'y'z'$ ，定系为 $Oxyz$ 。 \mathbf{r}_M 为绝对运动矢径， \mathbf{r}' 为相对运动矢径， $\mathbf{r}_{O'}$ 为动系坐标原点的矢径。在图 2-4 中，上述三个矢量之间存在如下关系式：

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}' \quad (2-3)$$

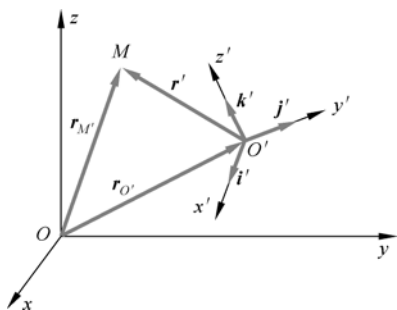


图 2-4 绝对运动矢径和相对运动矢径的关系

要得到绝对速度、相对速度与牵连速度之间的关系，可以对式(2-3)两边求导，即

$$\frac{dr_M}{dt} = \frac{dr_{O'}}{dt} + \frac{dr'}{dt} \quad (2-4)$$

显然，式(2-4)中等号左边为动点的绝对速度，即

$$v_a = \frac{dr_M}{dt}$$

以下考察式(2-4)中等号右边的两项 $\frac{dr_{O'}}{dt}$ 和 $\frac{dr'}{dt}$ 的意义。首先，考察 $\frac{dr'}{dt}$ 的意义。我们知道，相对运动矢径 r' 可在动系中表示为

$$r' = x'i' + y'j' + z'k'$$

当在动系上观察动点的运动时，单位矢量 i' , j' , k' 的方向保持不变，所以不难理解

$$v_r = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$$

就是动点 M 相对于动系 $O'x'y'z'$ 的运动速度，即相对速度。也就是说，相对速度 v_r 是相对运动矢径 r' 相对于动系 $O'x'y'z'$ 的时间导数，称之为 r' 的相对导数，记为 $\frac{\tilde{d}r'}{dt}$ ，即

$$\frac{\tilde{d}r'}{dt} = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k' = v_r$$

而当在定系中观察动点的运动时，单位矢量 i' , j' , k' 的方向是变化的，所以

$$\frac{dr'}{dt} = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k' + x'\dot{i}' + y'\dot{j}' + z'\dot{k}'$$

将此称为相对运动矢径 r' 相对于定系 $Oxyz$ 的绝对导数，即在定系上观察 r' 随时间的变化。

由泊松公式(1-23)可得绝对导数与相对导数之间的关系为

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{dt} &= \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k' + x'\dot{i}' + y'\dot{j}' + z'\dot{k}' \\ &= \frac{\tilde{d}r'}{dt} + \omega_e \times (x'i' + y'j' + z'k') \\ &= \frac{\tilde{d}r'}{dt} + \omega_e \times r' \end{aligned}$$

将上式代入式(2-4)中, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a &= \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \\ &= \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_{O'} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' \\ &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_{O'} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' \\ &= \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}') \end{aligned}$$

上式中, $\boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}')$ 即为动系上与动点相重合的点的速度, 即牵连速度 \mathbf{v}_e , 所以

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e \quad (2-5)$$

上式称为速度合成定理 (theorem for composition of velocities), 即某瞬时动点的绝对速度等于该瞬时动点的相对速度和牵连速度的矢量和。

由于证明时没有对绝对运动和相对运动轨迹形状进行任何限制, 也没有对牵连运动为何种刚体运动进行限制, 因此该定理对各种运动都是适用的。

例题 2-3

如例题图 2-3 所示, 半径为 R 、偏心距为 e 的凸轮, 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动, 杆 AB 能在滑槽中上下平动, 杆的端点 A 始终与凸轮接触, 且 OAB 成一条直线。求在图示位置时, 杆 AB 的速度。

分析: 因为杆 AB 做平动, 各点速度相同, 因此只要求出其上任意一点的速度即可。为了利用速度合成定理, 首先需要做好 3 件事: (1) 选取合适的动点; (2) 选取合适的动坐标系; (3) 明确绝对运动、相对运动和牵连运动的形式。

解:

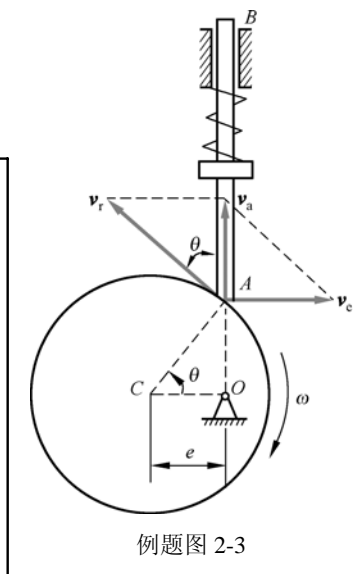
选取杆 AB 的端点 A 作为研究的动点, 动系随凸轮一起绕轴 O 转动。三个运动分别为: 绝对运动——沿铅垂轴的直线运动 (规律未知); 相对运动——沿凸轮轮廓的圆周运动 (规律未知); 牵连运动——绕轴 O 的匀角速度转动 (已知)。于是, 点 A 的绝对速度方向沿 AB , 相对速度方向沿凸轮圆周的切线, 而牵连速度为凸轮上与杆端点 A 重合的点的速度, 它的方向垂直于 OA 。

由速度合成定理得

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \\ \text{方向} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ \text{大小} & ? & \sqrt{\quad} \quad ? \end{array}$$

式中, \mathbf{v}_e 为凸轮上与动点 A 重合的点的速度, 由 $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA}$ 可知, 其方向垂直于 OA , 大小为 $v_e = \sqrt{r^2 - e^2} \omega$; $\mathbf{v}_r \perp CA$, 大小未知。

作速度合成的平行四边形, 如例题图 2-3 所示, 可得



例题图 2-3

$$v_a = v_e \cot \theta = \omega \cdot OA \frac{e}{OA} = \omega e$$

此即为点 A 的绝对速度。进而，可求得其相对速度为

$$v_r = \frac{v_e}{\cos \theta} = r\omega$$

讨论：

本题中，选择杆 AB 上的点 A 为动点，动坐标系与凸轮固连，因此三种运动特别是相对运动轨迹十分明显、简单，使问题得以顺利解决。反之，若选凸轮上的点（如与点 A 重合的点）为动点，而动坐标系与杆 AB 固连，这样，相对运动轨迹不仅难以确定，而且其曲率半径未知，从而导致求解（特别是求加速度）十分复杂。（请读者思考，在该情况下动点的相对运动轨迹具体是什么曲线。）

例题 2-4

刨床的急回机构如例题图 2-4(a)所示。曲柄 OA 的一端 A 与滑块用铰链连接。当曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕固定轴 O 转动时，滑块在摇杆 O_1B 上滑动，并带动摇杆 O_1B 绕固定轴 O_1 摆动。设曲柄长 $OA = r$ ，两轴间的距离 $OO_1 = l$ 。求当曲柄在水平位置时摇杆的角速度 ω_1 。

分析：若要求当曲柄在水平位置时摇杆的角速度 ω_1 ，则需要先求出此时摇杆上一点的速度。

解：

选取曲柄端点 A 作为研究的动点，把动系 $O_1x'y'$ 固定在摇杆 O_1B 上，并与 O_1B 一起绕轴 O_1 摆动。点的绝对运动是以点 O 为圆心的圆周运动，相对运动是沿 O_1B 方向的直线运动，而牵连运动则是摇杆绕轴 O_1 的摆动。

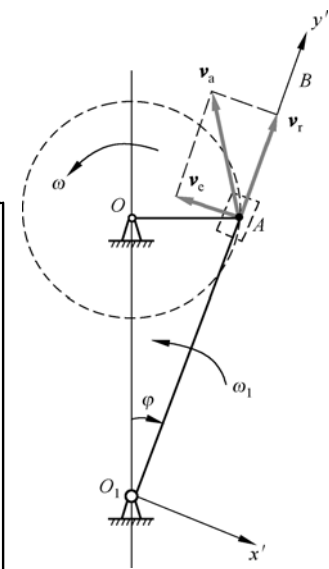
于是，绝对速度 v_a 的大小和方向都是已知的，它的大小等于 $r\omega$ ，而方向与曲柄 OA 垂直；相对速度 v_r 的方向是已知的，即沿 O_1B ；而牵连速度 v_e 是杆 O_1B 上与点 A 重合的那一点的速度，它的方向垂直于 O_1B ，也是已知的。共计有四个要素已知。作出速度合成的平行四边形，如例题图 2-4(a)所示。由其中的直角三角形可求得

$$v_e = v_a \sin \varphi$$

又 $\sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}$ ，且 $v_a = r\omega$ ，所以

$$v_e = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为 ω_1 ，则



例题图 2-4(a)

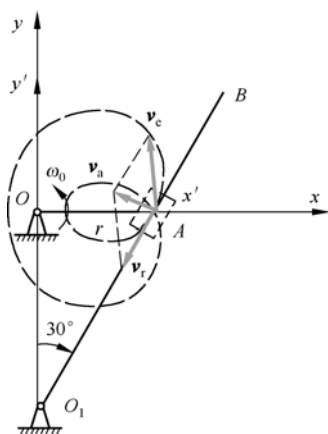
$$v_e = O_1 A \cdot \omega_1 = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

式中, $O_1 A = \sqrt{l^2 + r^2}$ 。由上式解得此瞬时摇杆的角速度为

$$\omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$

讨论:

若选取 $O_1 B$ 上的点 A 为动点, 动系固连在杆 OA 上, 则相对运动轨迹如例题图 2-4(b) 所示, 这会导致求解 (特别是求加速度) 十分复杂。



例题图 2-4(b)

例题 2-5

例题图 2-5 所示的直角弯杆 OBC 以匀角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ 绕轴 O 转动, 使套在其上的小环 M 沿固定直杆 OA 滑动; $OB = 0.1 \text{ m}$, 且垂直于 BC 。试求当 $\varphi = 60^\circ$ 时小环 M 的速度。

分析: 可以选小环 M 为动点, 动系固连于 OBC , 则本问题是已知动系的运动, 求动点的绝对运动。其中, 绝对运动为沿杆 OA 的直线运动; 相对运动为沿杆 BC 的直线运动; 牵连运动为绕点 O 的定轴转动。

解:

根据上述运动分析, 相应的速度合成定理为

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & & (a) \\ \text{方向} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ \text{大小} & ? & \sqrt{\quad} \quad ? \end{array}$$

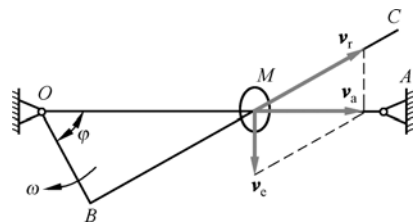
式中, \mathbf{v}_a 沿 OA 方向, 大小未知; \mathbf{v}_e 垂直于 OA 方向, 大小为 $v_e = OP \cdot \omega = 0.2 \times 0.5 = 0.1 \text{ m/s}$; \mathbf{v}_r 沿 BC 方向, 如例题图 2-5 所示。

式(a)中只有 \mathbf{v}_a 和 \mathbf{v}_r 两者的大小未知。由速度合成的平行四边形解得小环 M 的绝对速度为

$$v_a = \sqrt{3} v_e = 0.173 \text{ m/s}$$

此外, 还可求得点 M 的相对速度为

$$v_r = 2v_e = 0.2 \text{ m/s}$$

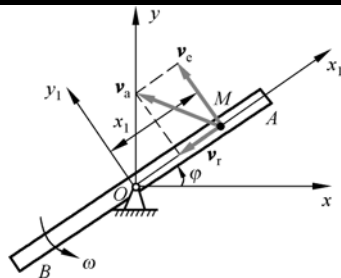


例题图 2-5

例题 2-6

圆管 BOA 以等角速度 ω 绕轴 O 转动, 起始瞬时圆管与 Ox 轴重合, 如例题图 2-6(a) 所示。圆管内的点 M 以 $x_1 = b \cos \omega t \text{ mm}$ 的规律相对于圆管运动, 求 $t = \frac{\pi}{6\omega}$ 瞬时点 M 的速度。

分析: 选取 M 为动点, 动系 Ox_1y_1 固连在圆管上, 则绝对运动为平面曲线运动 (规律未知), 相对运动为直线运动 (规律已知), 牵连运动为绕的定轴转动 (规律已知)。



例题图 2-6(a)

解:

根据上述运动分析, 应用速度合成定理, 有

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & & \\ \text{方向} & ? & \checkmark \quad \checkmark \\ \text{大小} & ? & \checkmark \quad \checkmark \end{array}$$

式中, $\mathbf{v}_e \perp OM$ 。由题意知 $\varphi = \omega t$, 当 $t = \frac{\pi}{6\omega}$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ mm, 所以 $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM} = x_1 \omega \mathbf{j}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}b\omega \mathbf{j}_1$ mm/s; \mathbf{v}_r 沿 OM 的方向, $\mathbf{v}_r = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{i}_1 = -b\omega \sin \omega t \mathbf{i}_1 = -\frac{1}{2}b\omega \mathbf{i}_1$ mm/s。于是, 点 M 的绝对速度为

$$\mathbf{v}_a = \frac{b\omega}{2}(-\mathbf{i}_1 + \sqrt{3}\mathbf{j}_1) \text{ mm/s}$$

讨论:

(1) 本题属于运动合成问题, 动点动系的选择比较直观。求解时, 借助坐标系单位矢量将各个分量表示清楚, 则速度的求解很简便。画出速度四边形图, 则有利于形象地理解速度合成定理。

(2) 本题也可利用动、定坐标间的变换关系, 直接建立点的绝对运动方程来研究点的运动, 这就是第1章所述的研究点运动的解析法。

由例题图 2-6(b), 可得点 M 的绝对运动方程为

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{cases}$$

且已知

$$\varphi = \omega t, \quad x_1 = b \cos \omega t, \quad y_1 = 0$$

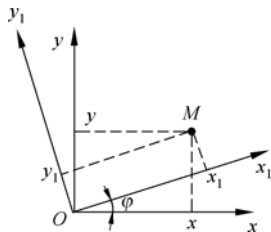
所以

$$\begin{cases} x = b \cos^2 \omega t = \frac{b}{2}(1 + \cos 2\omega t) \\ y = b \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{b}{2} \sin 2\omega t \end{cases}$$

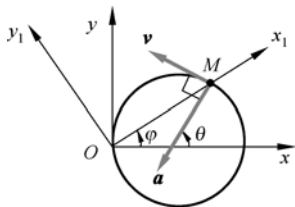
上列方程组是以 t 为参数的轨迹方程, 消去 t 可得点 M 的轨迹方程为

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

即点 M 的绝对轨迹是以 $C\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ 为圆心、 $\frac{b}{2}$ 为半径的圆周, 如例题图 2-6(c)所示。



例题图 2-6(b)



例题图 2-6(c)

求点 M 的绝对速度和绝对加速度。由例题图 2-6(b) 可得, $\theta = 2\varphi = 2\omega t$, 故点 M 沿圆周做等速运动, 点 M 的绝对速度和绝对加速度分别为

$$v = \frac{b}{2} \dot{\theta} = b\omega \text{ mm/s, 方向沿圆周切线}$$

$$a = a_n = \frac{b}{2} \dot{\theta}^2 = 2b\omega^2 \text{ mm/s, 方向指向圆心}$$

将点的复合运动分析方法与点的运动学分析方法进行比较可知, 前者主要研究动点在指定位置上的速度和加速度, 往往不要求弄清动点的运动全貌; 后者则通过建立动点绝对运动方程, 得到点持续运动过程中的各个运动量, 便于弄清点运动的全貌, 而指定瞬时的各个运动量可作为特殊值得到。对于实际问题, 应根据不同的要求, 选用恰当的研究方法。

2.4 点的加速度合成定理——三种运动加速度间的关系

本节分析三种运动加速度——绝对加速度、相对加速度和牵连加速度之间的关系。

2.3 节的分析表明, 速度合成定理对于任何形式的牵连运动都是适用的。但是下面的分析则表明, 加速度问题比较复杂, 对于不同形式的牵连运动, 会得到不同的结论。

如图 2-5 所示, 点 M 为动点, 动系为 $O'x'y'z'$, 定系为 $Oxyz$ 。 r_M 为绝对运动矢径, r' 为相对运动矢径, $r_{O'}$ 为动系坐标原点的矢径。根据速度合成定理, 有

$$v_a = v_r + v_e$$

对时间求导, 得

$$a_a = \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_r}{dt}$$

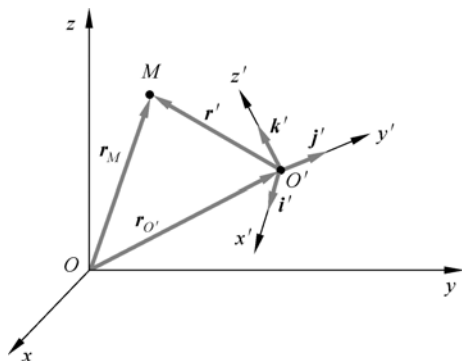


图 2-5 绝对运动矢径与相对运动矢径的关系

因为

$$v_r = \dot{x}'i' + \dot{y}'j' + \dot{z}'k'$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} &= \ddot{x}'\mathbf{i}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}' + \dot{x}'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \\ &= \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r\end{aligned}$$

式中, $\mathbf{a}_r = \ddot{x}'\mathbf{i}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}'$ 为相对加速度, 相对于动系 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 的方向保持不变, 只有 $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ 变化, 因此也可写成

$$\mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \ddot{x}'\mathbf{i}' + \ddot{y}'\mathbf{j}' + \ddot{z}'\mathbf{k}'$$

$\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$ 则反映由于牵连运动(转动)引起 \mathbf{v}_r 方向的变化。

又因为

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_M$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_a \\ &= \boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r) \\ &= \boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r\end{aligned}$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_e = \mathbf{a}_e$ 为牵连加速度。上式中的 $\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$ 反映相对运动引起的 \mathbf{v}_e 大小的改变。

由上述结果, 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_a &= \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_e \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\ &= \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r\end{aligned}$$

记

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \quad (2-6)$$

称为科氏加速度 (Coriolis acceleration), 从而得

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C \quad (2-7)$$

式(2-7)即为点的加速度合成定理 (theorem for composition of acceleration), 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和。

可以证明, 无论牵连运动为何种运动形式, 式(2-7)都成立, 因此它是点的加速度合成定理的普遍形式。

特殊地, 当动系做平动时, $\boldsymbol{\omega}_e = 0$, 相应地, $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r = 0$ 。此时, 加速度合成定理的形式为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e \quad (2-8)$$

即当牵连运动为平动时, 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时的牵连加速度与相对加速度的矢量和。

例题 2-7

凸轮在水平面上向右做减速运动, 如例题图 2-7(a)所示。设凸轮半径为 R , 图示瞬时的速度和加速度分别为 v 和 a 。求杆 AB 在图示位置时的加速度。

分析: 杆 AB 做平动, 只要求出图示位置时杆 AB 上任意一点的加速度即可。

解:

以杆 AB 上的点 A 为动点, 凸轮为动系, 则点 A 的绝对轨迹为直线, 相对轨迹为凸轮轮廓曲线。由于牵连运动为平动, 点的加速度合成定理为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

式中, \mathbf{a}_a 为所求的加速度, 已知它的方向沿直线 AB , 但指向和大小尚待确定; 点 A 的牵连加速度为凸轮上与动点重合的点的加速度, 即有 $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}$; 点 A 的相对轨迹为曲线, 于是相对加速度分为两个分量: 切向分量 \mathbf{a}_r^t 的大小是未知的, 法向分量 \mathbf{a}_r^n 的方向如例题图 2-7(a)所示, 大小为

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R}$$

相对速度 v_r 可根据速度合成定理求出, 其方向如例题图 2-7(b)所示, 大小为

$$v_r = \frac{v_e}{\sin \varphi} = \frac{v}{\sin \varphi}$$

于是

$$a_r^n = \frac{1}{R} \frac{v^2}{\sin^2 \varphi}$$

加速度合成定理可写成如下形式:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_r^n$$

$$\text{方向} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$$

$$\text{大小} \quad ? \quad \sqrt{\quad} \quad ? \quad \sqrt{\quad}$$

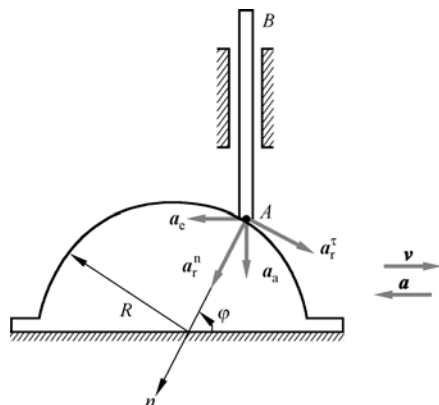
假设 \mathbf{a}_a 和 \mathbf{a}_r^t 的指向如例题图 2-7(a)所示。为了计算 \mathbf{a}_a 的大小, 将上式投影到法线上, 得

$$a_a \sin \varphi = a_e \cos \varphi + a_r^n$$

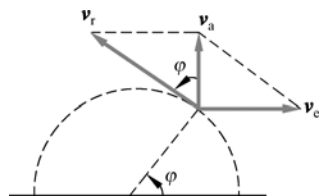
解得

$$a_a = \frac{1}{\sin \varphi} \left(a \cos \varphi + \frac{v^2}{R \sin^2 \varphi} \right) = a \cot \varphi + \frac{v^2}{R \sin^3 \varphi}$$

当 $\varphi < 90^\circ$ 时, $a_a > 0$, 说明假设的 \mathbf{a}_a 指向恰是其真实指向。



例题图 2-7(a)



例题图 2-7(b)

例题 2-8

在凸轮顶杆机构中, 凸轮半径为 r , 偏心距为 $OC = e$, 以等角速度 ω 绕轴 O 转动, 如例题图 2-8(a)所示。求当 $OC \perp OA$ 瞬时顶杆的加速度。

分析：顶杆做平动，因此杆上点 A 的运动即可代表顶杆的运动。偏心凸轮绕轴 O 转动时，顶杆上的点 A 与凸轮恒接触，相对于凸轮沿其轮廓线运动，由于点 A 的相对轨迹可知，故选点 A 为动点。相应地，动系固连于凸轮上。绝对运动为沿铅垂轴的直线运动（规律未知）；相对运动为沿凸轮轮廓的圆周运动（规律未知）；牵连运动为绕轴 O 的匀角速度转动（规律已知）。

解：

根据上述分析，此时牵连运动为等角速度转动，相对轨迹是曲线，所以加速度合成定理可表示为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r^\tau + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_C \quad (\text{a})$$

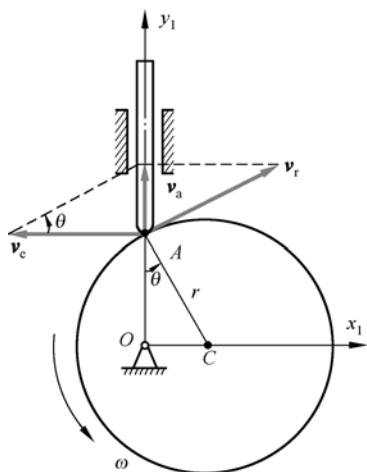
方向	√	√	√	√	√
大小	?	√	?	√	√

式中， a_a 大小未知，方向可假设向上； $a_e^n = OA \cdot \omega^2 = \sqrt{r^2 - e^2} \cdot \omega^2$ ，方向沿 y_1 轴指向点 O ；

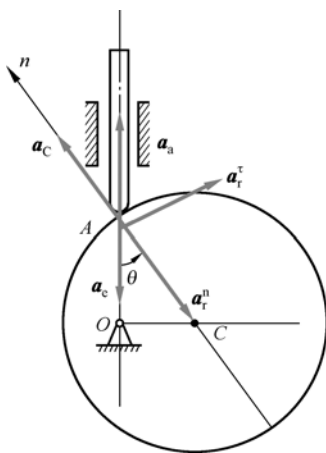
$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = r\omega^2$ ，方向沿相对轨迹的法线指向圆心 C ； $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ ， $a_C = 2\omega v_r = 2r\omega^2$ ，方向如例题图 2-8(b) 所示； a_r^τ 大小未知，沿相对轨迹切线方向，假设指向如例题图 2-8(b) 所示。

所以，加速度合成式中只有两个未知量，全部可求解。为了方便求解，可选择恰当的投影轴，如将式(a)投影至轴 n ，可得

$$a_a \cos \theta = -a_e^n \cos \theta - a_r^n + a_C \quad (\text{b})$$



例题图 2-8(a)



例题图 2-8(b)

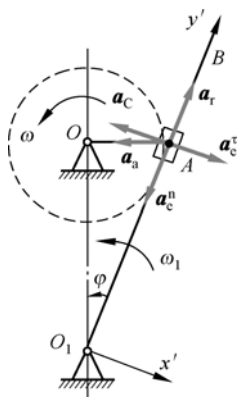
各个已知量代入式(b)，又有 $\cos \theta = \frac{\sqrt{r^2 - e^2}}{r}$ ，经运算后得

$$a_a = \frac{e^2}{\sqrt{r^2 - e^2}} \omega^2$$

结果 $a_a > 0$ ，表明假设方向正确。至于 a_r^τ ，请读者另选恰当的投影轴自行计算。

例题 2-9

刨床的急回机构如例题图 2-9 所示。曲柄 OA 的一端 A 与滑块用铰链连接。当曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕固定轴 O 转动时, 滑块在摇杆 O_1B 上滑动, 并带动摇杆 O_1B 绕固定轴 O_1 摆动。设曲柄长 $OA=r$, 两轴间的距离 $OO_1=l$ 。求当曲柄在水平位置时摇杆的角加速度。



例题图 2-9

分析: 为了求当曲柄在水平位置时摇杆的角加速度, 需要首先求得曲柄上任意一点的切向加速度。可以用动系做转动的加速度合成定理求解。

解:

选取曲柄端点 A 作为研究的动点, 把动系 $O_1x'y'$ 固定在摇杆 O_1B 上, 并与 O_1B 一起绕轴 O_1 摆动。由于动系做转动, 因此加速度合成定理为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_e^{\tau} + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (\text{a})$$

方向	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
大小	$\sqrt{\quad}$?	$\sqrt{\quad}$?

由于 $a_e^{\tau} = \alpha \cdot O_1A$, 欲求摇杆 O_1B 的角加速度 α , 只需求出 a_e^{τ} 即可。下面分别分析上式中的各项。

\mathbf{a}_a : 因为动点的绝对运动是以 O 为圆心的匀速圆周运动, 故只有法向加速度, 方向如例题图 2-9 所示, 大小为 $a_a = \omega^2 r$ 。

\mathbf{a}_e : 摇杆上与动点相重合的点的加速度。摇杆摆动, 其上点 A 的切向加速度为 a_e^{τ} , 垂直于 O_1A , 假设指向如例题图 2-9 所示; 法向加速度为 a_e^n , 其大小为 $a_e^n = \omega_1^2 \cdot O_1A$ 方向如例题图 2-9 所示。由于在例题 2-4 中已求得 ω_1 为

$$\omega_1 = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}, \quad \text{且 } O_1A = \sqrt{l^2 + r^2}$$

所以

$$a_e^n = \frac{r^4 \omega^2}{(l^2 + r^2)^{3/2}}$$

\mathbf{a}_r : 因为相对轨迹为直线, 故 \mathbf{a}_r 沿 O_1A 方向, 大小未知。

\mathbf{a}_C : 由 $\mathbf{a}_C = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$ 知 $\mathbf{a}_C = 2\omega_1 v_r \sin 90^\circ$, 由例题 2-4 可知

$$v_r = v_a \cos \varphi = \frac{\omega r l}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

于是, 有

$$a_C = \frac{2\omega^2 r^3 l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}$$

方向如例题图 2-9 所示。

为了求得 a_e^{τ} , 应将加速度合成定理式(a)向 O_1x' 轴投影, 即

$$a_{ax'} = a_{ex'} + a_{rx'} + a_{Cx'}$$

或
解得

$$-a_a \cos \varphi = a_e^r - a_c$$

$$a_e^r = -\frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \omega^2$$

式中, $l^2 - r^2 > 0$, 故 a_e^r 为负值, 表示真实方向与图中假设的指向相反。

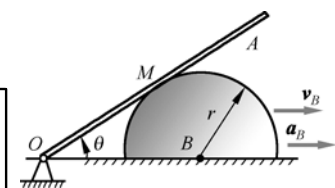
摇杆 O_1A 的角加速度为

$$\alpha = \frac{|a_e^r|}{O_1A} = \frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^2} \omega^2$$

方向如例题图 2-9 所示。

例题 2-10

如图 2-10(a)所示, 已知半圆形凸轮半径为 r , 图示瞬时 $\theta = 30^\circ$, 凸轮以速度 v_B 和加速度 a_B 平动。杆 OA 靠在凸轮上。试求此瞬时杆的角速度 ω 和角加速度 α 。



例题图 2-10(a)

分析: 本题的关键是求得此瞬时杆上任意一点的速度和切向加速度。下面分别利用速度合成定理和加速度合成定理进行分析, 并用两种方法进行速度求解。

解:

(1) 速度分析。

解法 1:

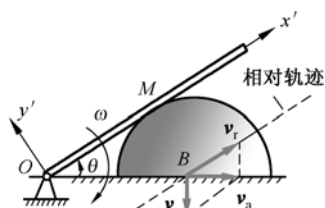
取凸轮圆心 B 为动点, 动系固定在杆 OA 上。此时, 绝对运动为直线运动, $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_B$, $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_B$; 牵连运动为定轴转动, ω 和 α 未知; 相对运动为直线运动, 轨迹与 OA 平行。根据速度合成定理, 有

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & & \\ \text{方向} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ \text{大小} & ? & \sqrt{\quad} \quad ? \end{array}$$

各速度的方向如例题图 2-10(b)所示。于是, 有

$$v_e = v_a \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} v_B$$

$$\omega = \frac{v_e}{OB} = \frac{v_e}{2r} = \frac{\sqrt{3}v_B}{6r}$$



例题图 2-10(b)

解法 2:

假想用小环 M 套住杆 OA 和凸轮轮缘, 如例题图 2-10(c)所示。取 M 为动点, 第一动系 Ox_1y_1 固连于杆 OA 。相对运动沿直线 OA 方向, 相对速度为 \mathbf{v}_{r1} ; 牵连运动为定轴转动, 牵连速度 $\mathbf{v}_{e1} = OM \cdot \omega$ 。由速度合成定理, 可得

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1}$$

取第二动系为 $O_2x_2y_2$ 。相对运动为沿凸轮轮廓的圆弧运动，相对速度 \mathbf{v}_{r2} 与轮缘相切（沿 OA ）；牵连运动为平动，牵连速度 $\mathbf{v}_{e2} = \mathbf{v}_B$ 。由速度合成定理，可得

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2}$$

因此，有

$$\mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2}$$

向轴 ξ 投影（如例题图 2-10(d)所示），得

$$v_{e1} = v_{e2} \sin \theta = \frac{v_B}{2}, \quad \omega = \frac{v_{e1}}{OM} = \frac{\sqrt{3}v_B}{6r}$$

(2) 加速度分析。

根据加速度合成定理，有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

因为动系做转动，所以

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

式中， $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_B$ ， $\mathbf{a}_C = 2\omega \times \mathbf{v}_r$ 。

将上式向轴 ξ 投影（如例题图 2-10(e)所示），可得

$$a_a \sin \theta = a_C + a_e^\tau \cos \theta - a_e^n \sin \theta$$

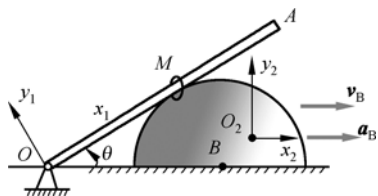
因为

$$v_r = 2v_e = \frac{2\sqrt{3}}{3}v_B, \quad a_C = 2\omega v_r = \frac{2v_B^2}{3r}, \quad a_e^n = OB\omega^2 = 2r\omega^2 = \frac{v_B^2}{6r}$$

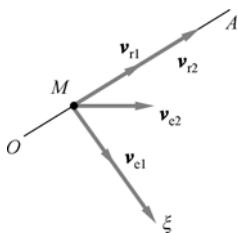
所以

$$a_e^\tau = (a_a + a_e^n) \tan \theta - \frac{a_C}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}a_B - \frac{7\sqrt{3}}{18} \frac{v_B^2}{r}$$

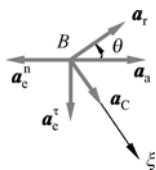
$$\alpha = \frac{a_e^\tau}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{6r}a_B - \frac{7\sqrt{3}v_B^2}{36r^2}$$



例题图 2-10(c)



例题图 2-10(d)



例题图 2-10(e)

例题 2-11

半径为 r 的圆轮以等角速度 ω 绕轴 O 转动, 从而带动靠在轮上的杆 O_1A 绕轴 O_1 摆动, 如例题图 2-11(a) 所示。已知 $OO_1 = 3r$, 试求图示位置杆 O_1A 的角速度与角加速度。

分析: 本题的解题思路 and 上题类似, 即利用速度合成定理和加速度合成定理求得图示位置杆 O_1A 上任意一点的速度和切向加速度。

解:

在机构运动过程中, 圆轮与摆杆始终保持接触, 但没有一个持续的接触点。注意, 轮心 C 至杆 O_1A 的距离始终为半径 r , 因此点 C 相对于杆 O_1A 的轨迹是与杆 O_1A 相平行的一条直线段, 于是可选点 C 为动点, 杆 O_1A 上固连动系 $O_1x_1y_1$, 则绝对运动为以 O 为圆心、 r 为半径的圆周运动 (规律已知); 相对运动为与杆 O_1A 平行的直线运动 (规律未知)。牵连运动为绕轴 O_1 的定轴转动 (待求)。速度合成定理为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

方向	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
大小	$\sqrt{\quad}$?	?

式中, $\mathbf{v}_a \perp OC$, $v = r\omega$; 且 $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_{O_1C}$, 即 $\mathbf{v}_e \perp O_1C$, 大小未知; \mathbf{v}_r 沿相对轨迹切向。作速度合成的平行四边形, 如例题图 2-11(a) 所示。

若令 $\angle CO_1O = \theta$, 则

$$\tan \theta = \frac{1}{3}, \text{ 且 } \angle AO_1C = \theta$$

故

$$v_e = 2v_a \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{5} r\omega$$

$$v_r = v_a = r\omega$$

于是

$$\omega_{O_1A} = \omega_e = \frac{v_e}{O_1C} = \frac{1}{5} \omega \quad (\text{顺时针})$$

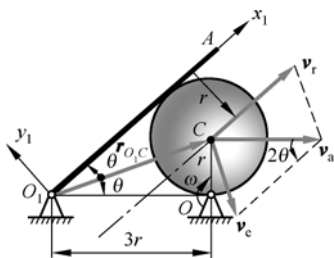
牵连运动为定轴转动, 加速度合成定理可表示为

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (\text{a})$$

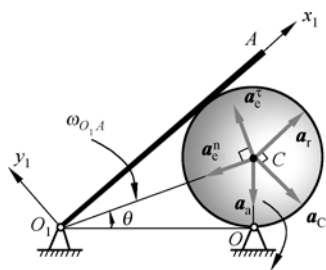
方向	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
大小	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$?	?	$\sqrt{\quad}$

经分析可知, 各加速度分量中, 只有牵连切向加速度及相对加速度的大小为未知, 其他均为已知, 画出各个分量, 如例题图 2-11(b) 所示。其中

$$a_a = r\omega^2; \quad a_e^n = O_1C \cdot \omega_{O_1A}^2 = \frac{\sqrt{10}}{25} r\omega^2;$$



例题图 2-11(a)



例题图 2-11(b)

$$\mathbf{a}_C = 2\omega_{O_1A} \times \mathbf{v}_r, \quad a_C = 2\omega_{O_1A} v_r \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{5} r \omega^2$$

\mathbf{a}_r 的指向及 \mathbf{a}_e^τ 的指向均为假设。将式(a)投影于轴 O_1y_1 , 得

$$-a \cos 2\theta = a_e^\tau \cos \theta + a_e^n \sin \theta - a_c$$

所以

$$a_e^\tau = -\frac{11}{75} \sqrt{10} r \omega^2$$

其中负号表明 \mathbf{a}_e^τ 的实际指向与假设的相反。杆 O_1A 的角加速度为

$$\alpha_{O_1A} = \frac{a_e^\tau}{O_1C} = -\frac{11}{75} \omega^2 \quad (\text{实际转向为顺时针}).$$

讨论:

本题为选择动点和动坐标系的方式提供了一种新的思路: 以传动机构中某刚体上一个非接触点为动点, 相应地, 动坐标系固连于传动件中另一个刚体上。这种选择方法, 与前面讨论过的两种机构(例题 2-8 和例题 2-9)的选择是一致的, 均易于根据约束条件确定动点的相对轨迹, 从而易于分析 \mathbf{v}_r 和 \mathbf{a}_r , 也就便于解题。由此可见, 选择动点和动系时, 不但有原则上的一致性, 而且在针对具体问题时还有一定的灵活性。因而, 读者要重视对具体问题进行分析。

本章小结

(1) 基本概念

① 定坐标系(定系); ② 动坐标系(动系)和牵连运动; ③ 动点及其绝对运动和相对运动; ④ 动点的绝对速度和绝对加速度; ⑤ 动点的相对速度和相对加速度; ⑥ 动点的科氏加速度; ⑦ 牵连点及动点的牵连速度和牵连加速度。

概括为两种坐标系(定系和动系)、两个点(动点和牵连点)、三个运动(绝对、相对和牵连运动)以及相应的速度和加速度。

(2) 定理

① 速度合成定理

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

② 加速度合成定理

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c; \quad \mathbf{a}_C = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$$

式中, ω_e 为动系的角速度。因平动动系 $\omega_e = 0$, 故 $\mathbf{a}_C = 0$ 。

(3) 解题方法小结

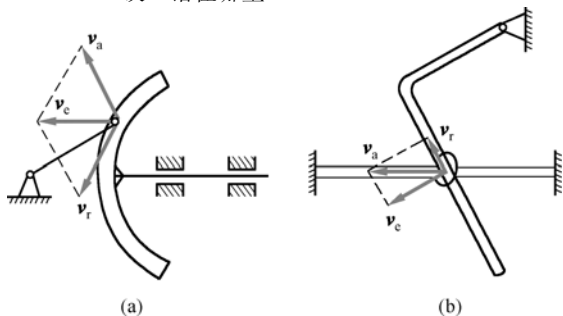
① 各类问题的共同点是正确选取动点和动系; 分析三个运动的形式及其速度和加速度; 进而应用速度合成定理及加速度合成定理建立各物理量之间的关系。

② 分析的关键是相对运动轨迹的形状, 要充分利用约束条件, 使得相对运动轨迹直观、明显, 并便于计算。

③ 计算时先列出矢量式, 再用投影式完成各物理量的定量计算, 并把计算结果特别是相应物理量的方向(转向)标示在图上。

思考题

2-1 思考题图 2-1 中的速度平行四边形有无错误？错在哪里？



思考题图 2-1

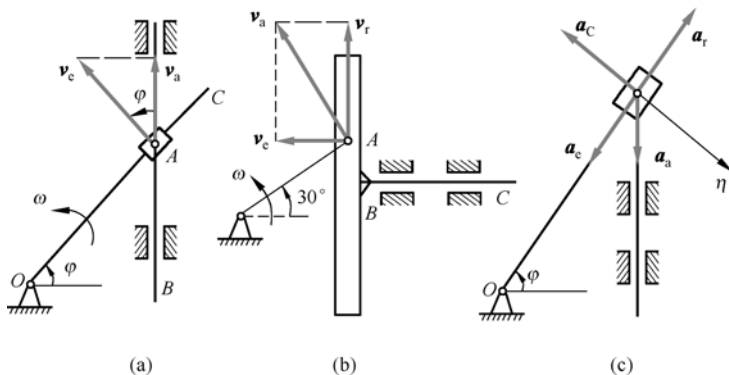
2-2 如下计算对不对？若不对，错在哪里？

(a) 思考题图 2-2(a)中，取动点为滑块 A ，动系为杆 OC ，则 $v_e = \omega \cdot OA$ ， $v_a = v_e \cos \varphi$ ；

(b) 思考题图 2-2(b)中，取滑块 A 为动点，杆 BC 为动系，则

$v_{BC} = v_e = v_a \cos 60^\circ$ ， $v_a = \omega r$ ；因为 $\omega = \text{常量}$ ，所以 $v_{BC} = \text{常量}$ ， $a_{BC} =$

$$\frac{dv_{BC}}{dt} = 0;$$



思考题图 2-2

(c) 思考题图 2-2(c)中，为了求 a_a 的大小，取加速度合成定理在轴上的投影式为

$$a_a \cos \varphi - a_c = 0$$

$$\text{所以 } a_a = \frac{a_c}{\cos \varphi}$$

2-3 试指出下面的推导错在哪里？点的速度合成定理 $v_a = v_e + v_r$ 对牵连运动是平动或转动都成立，将其两端对时间求导，得

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_r}{dt}$$

从而有

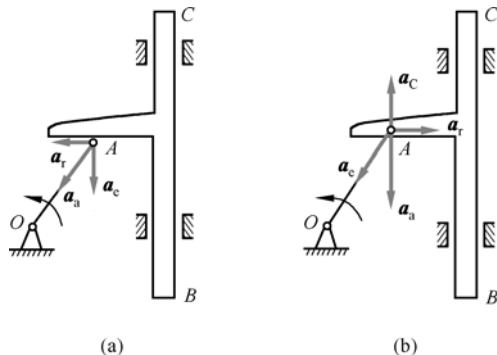
$$a_a = a_e + a_r$$

因而，此式对牵连运动是平动或是转动都应成立。

2-4 在思考题图 2-4 中，曲柄 OA 以匀角速度转动，下面(a)、(b)中哪一种分析正确？

(a) 以 OA 上的点 A 为动点，以 BC 为动系；

(b) 以 BC 上的点 A 为动点，以 OA 为动系。

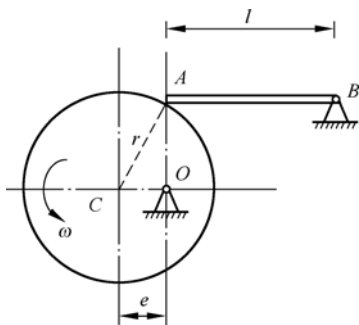


思考题图 2-4

习 题

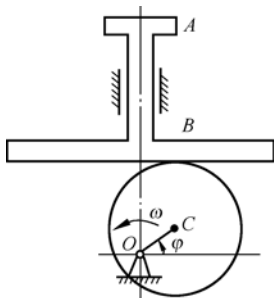
基本题

- 2-1 凸轮以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，杆 AB 的 A 端搁在凸轮上。如习题图 2-1 所示瞬时杆 AB 处于水平位置， OA 为铅直。试求该瞬时杆 AB 的角速度大小及转向。



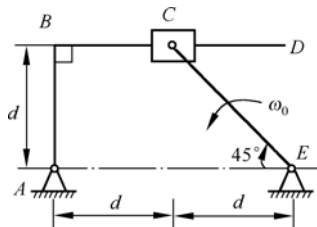
习题图 2-1

- 2-2 平底顶杆凸轮机构如习题图 2-2 所示，顶杆 AB 可沿导轨上下移动，偏心圆盘绕轴 O 转动，轴 O 位于顶杆轴线上。工作时顶杆的平底始终接触凸轮表面。该凸轮半径为 R ，偏心距 $OC=e$ ，凸轮绕轴 O 转动的角速度为 ω ， OC 与水平线成夹角 φ 。求当 $\varphi=0^\circ$ 时，顶杆的速度。



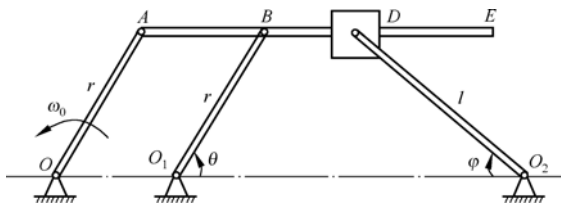
习题图 2-2

- 2-3 曲柄 CE 在习题图 2-3 所示瞬时以 ω_0 绕轴 E 转动，并带动直角曲杆 ABD 在图示平面内运动。若 d 为已知，试求曲杆 ABD 的角速度。



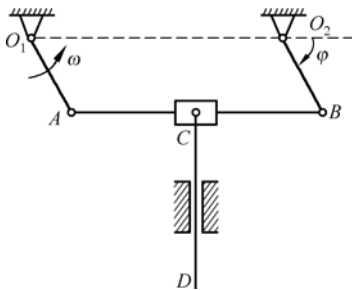
习题图 2-3

- 2-4 在习题图 2-4 所示平面机构中，已知： $OO_1=AB$ ， $OA=O_1B=r=3\text{ cm}$ ，摇杆 O_2D 在点 D 与套在杆 AE 上的套筒铰接。 OA 以匀角速度 $\omega_0=2\text{ rad/s}$ 转动， $O_2D=l=3\sqrt{3}\text{ cm}$ 。试求：当 $\varphi=30^\circ$ 时， O_2D 的角速度和角加速度。



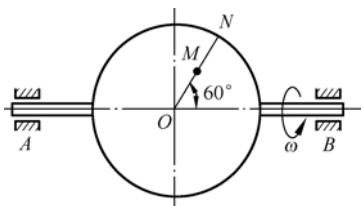
习题图 2-4

- 2-5 在习题图 2-5 所示的铰接平行四边形机构中， $O_1A=O_2B=100\text{ mm}$ ， $O_1O_2=AB$ ，杆 O_1A 以等角速度 $\omega=2\text{ rad/s}$ 绕轴 O_1 转动。杆 AB 上有一个套筒 C ，此筒与杆 CD 铰相接。机构的各个部件都在同一铅直面内。求当 $\varphi=60^\circ$ 时，杆 CD 的速度和加速度。



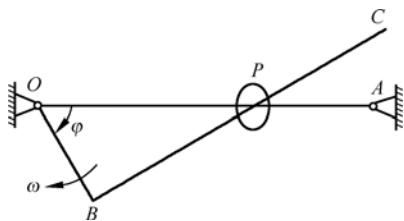
习题图 2-5

- 2-6 如习题图 2-6 所示,圆盘绕轴 AB 转动,其角速度 $\omega = 2t \text{ rad/s}$ 。点 M 沿圆盘半径 ON 离开中心向外缘运动,其运动规律为 $OM = 40t^2 \text{ mm}$ 。半径 ON 与轴 AB 成 60° 倾角。求当 $t = 1 \text{ s}$ 时,点 M 的绝对加速度大小。



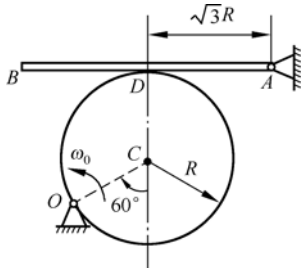
习题图 2-6

- 2-7 如习题图 2-7 所示,直角曲杆 OBC 绕轴 O 转动,使套在其上的小环 P 沿固定直杆 OA 滑动。已知: $OB = 0.1 \text{ m}$, 曲杆的角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$, 角加速度为零。求当 $\varphi = 60^\circ$ 时,小环 P 的加速度。



习题图 2-7

- 2-8 半径为 R 的圆轮,以匀角速度 ω_0 绕轴 O 沿逆时针转动,并带动杆 AB 绕轴 A 转动。在习题图 2-8 所示瞬时, OC 与铅直线的夹角为 60° , 杆 AB 水平,圆轮与杆 AB 的接触点 D 距 A 为 $\sqrt{3}R$ 。求此时杆 AB 的角加速度。

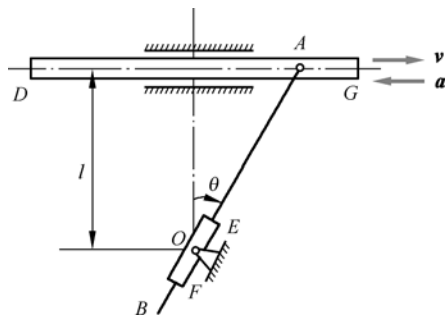


习题图 2-8

提高题

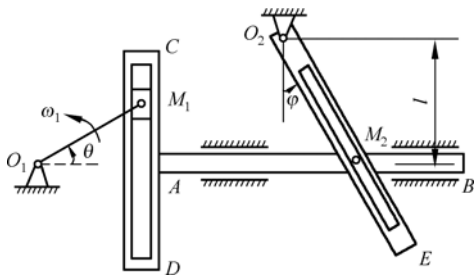
- 2-9 如习题图 2-9 所示,摆杆 AB 与水平杆 DG 以铰链 A 连接。水平杆做平动,摆杆 AB 穿过可绕轴 O 转动的套筒 EF ,并在套筒 EF 内滑动。已知: $l = 2 \text{ m}$, 在图示位置 $\theta = 30^\circ$ 时,杆 DG 的速度 $v = 2 \text{ m/s}$, 加速度 $a = 1 \text{ m/s}^2$ 。试求:

- (1) 图示瞬时杆 AB 的角速度及杆 AB 在套筒中滑动的速度;
- (2) 图示瞬时杆 AB 的角加速度及杆 AB 在套筒中滑动的加速度。



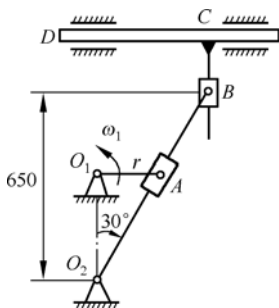
习题图 2-9

- 2-10 曲柄 O_1M_1 以匀角速度 $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ 绕轴 O_1 沿逆时针转动。T 形构件做水平往复运动, M_2 为该构件上固连的销钉。槽杆 O_2E 绕轴 O_2 摆动。已知 $O_1M_1 = r = 20 \text{ cm}$, $l = 30 \text{ cm}$ 。当机构运动到如习题图 2-10 所示的位置时, $\theta = \varphi = 30^\circ$, 求此时杆 O_2E 的角加速度。



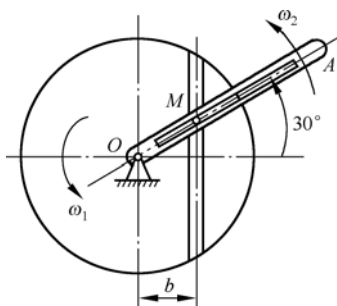
习题图 2-10

- 2-11 牛头刨床机构如习题图 2-11 所示。已知 $O_1A = r = 200 \text{ mm}$, 角速度 $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, 角加速度 $\alpha = 0$ 。求图示位置滑枕 CD 的速度和加速度。



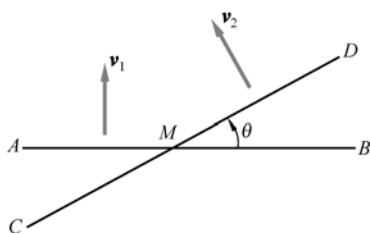
习题图 2-11

- 2-12 如习题图 2-12 所示, 绕轴 O 转动的圆盘及直杆 OA 上均有一个导槽, 两个导槽间有一个活动销子 M , $b=0.1\text{ m}$ 。设在图示位置时, 圆盘及直杆的角速度分别为 $\omega_1=9\text{ rad/s}$ 和 $\omega_2=3\text{ rad/s}$ 。求此瞬时销子 M 的速度和加速度。



习题图 2-12

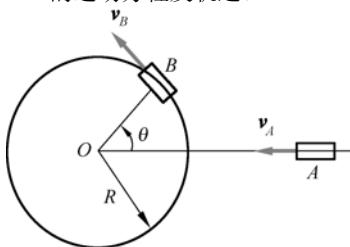
- 2-13 直线 AB 以大小为 v_1 的速度沿垂直于 AB 的方向向上移动, 直线 CD 以大小为 v_2 的速度沿垂直于 CD 的方向向左上方移动, 如习题图 2-13 所示。若两条直线间的交角为 θ , 求两条直线交点 M 的速度和加速度。



习题图 2-13

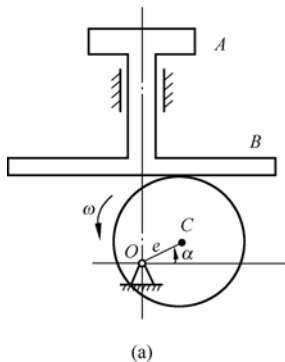
研究性题目

- 2-14 如习题图 2-14 所示, 两辆汽车均匀速前进, 车 A 沿直线行驶, $OA=x_0-v_At$, 车 B 沿圆周行驶, $\theta=\omega t$, 圆周半径为 R 。求: (1) 车 A 上的乘客看到的车 B 的运动方程及轨迹; (2) 车 B 上的乘客看到的车 A 的运动方程及轨迹。

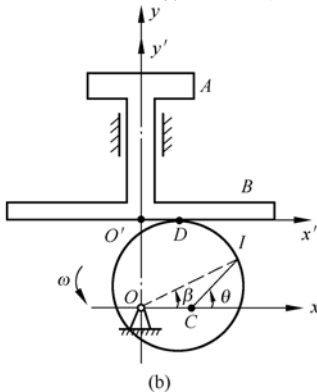


习题图 2-14

- 2-15 如习题图 2-15(a)所示的机构, 顶杆 AB 可沿导槽上下移动, 偏心圆盘以角速度 ω 绕轴 O 转动, 轴 O 位于顶杆轴线上。工作时顶杆平底始终接触凸轮表面。该凸轮半径 $R=400\text{ mm}$, 偏心距 $OC=e=300\text{ mm}$, OC 与水平线成 α 角, 求 $\alpha=0^\circ$ 时顶杆的速度。设 $t=0$ 的瞬时 $\alpha=0^\circ$, 如果选此时凸轮上与顶杆相接触的点 (设为点 D) 为动点, 如习题图 2-15(b)所示, 并且动系 $O'x'y'$ 固定在顶杆 AB 上的话, 相对运动轨迹将为何种曲线?



(a)



(b)

习题图 2-15

刚体除了做平动和定轴转动这两种最简单、最基本的运动之外，还可以有更复杂的运动形式，如刚体的平面运动、刚体的空间运动等。其中，刚体的平面运动是工程实际中较为常见的一种运动。机械中有很多机构的构件都是做平面运动的，因此平面运动的理论对研究机构的运动具有很重要的意义。在对土木工程中的平面结构进行动力学分析时，也要以平面运动的理论为依据。

所谓刚体的平面运动分析，就是以刚体平移和定轴转动为基础，应用运动分解和合成的方法，分析和研究工程中常见而又比较复杂的刚体平面运动的速度和加速度。这既是工程运动学的重点内容，同时也是工程动力学的基础。

3.1 刚体的平面运动方程及运动分解

分析模型

考察图 3-1 所示的曲柄滑块机构，其中杆 OA 做定轴转动，滑块 B 做水平直线平移，而连杆 AB 的运动既不是平移，也不是定轴转动，但它运动时具有一个特点，即在运动过程中，刚体 AB 上任意一点与某一个固定平面的距离始终保持不变。我们称刚体的这种运动为平面运动 (planar motion)。

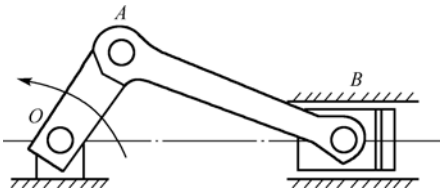


图 3-1 曲柄滑块机构

图 3-2 所示的是一个做平面运动的刚体，刚体上各点至平面 α_1 的距离保持不变。过刚体上任意一点 A ，作平面 α_2 平行于平面 α_1 ，显然，刚体上过点 A 并垂直于平面 α_2 的直线上各点 $A_1, A_2, A_3 \dots$ 的运动与点 A 是相同的。因此，平面 α_2 与刚体相交所截取的平面图形 S 就能完全表征该刚体的运动，平面图形 S 上的任意一条直线 AB 又能代表该图形 (即平面运动刚体) 的运动 (如图 3-3 所示)。于是，研究刚体的平面运动可以简化为研究平面图形或其上任意一条直线 AB 的运动。此即是刚体平面运动的力学模型。

运动方程

为了确定图 3-3 中直线 AB 在平面 Oxy 上的位置，需要 3 个独立变量， $q = (x_A, y_A, \varphi)$ 。其中，

坐标 x_A, y_A 确定点 A 在该平面上的位置, φ 确定直线 AB 在该平面中的方位。因此, 刚体平面运动的运动方程式为

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) = f_1(t) \\ y_A = y_A(t) = f_2(t) \\ \varphi = \varphi(t) = f_3(t) \end{cases} \quad (3-1)$$

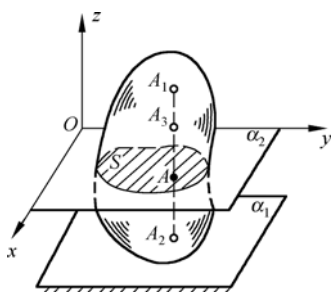


图 3-2 平面运动的刚体

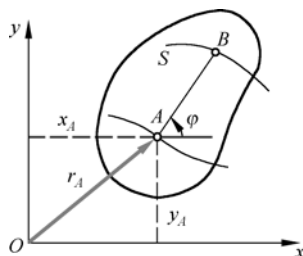


图 3-3 刚体平面运动的力学模型

该式完全确定了做平面运动的刚体的运动规律, 也完全确定了该刚体上任意一点的运动状态 (轨迹、速度和加速度等)。

运动分解

如图 3-4 所示, 在平面图形的点 A 处假想安放一个平移坐标系 $Ax'y'$, 当图形运动时, 坐标系的两个轴始终分别平行于固定坐标轴 Ox 和 Oy 。设在时间间隔 Δt 内, 平面图形由位置 I 运动到位置 II。相应地, 图形内任意取的线段从 AB 运动到 $A'B'$ 。这个位移可分解为: 线段 AB 随点 A 平行移动到位置 $A'B''$, 再绕 A' 由位置 $A'B''$ 转动 $\Delta\varphi_1$ 角到达位置 $A'B'$ 。通常, 将这个平移的动系的原点 A 称为**基点** (base point)。于是, 平面图形的平面运动便可分解为随同基点 A 的平移 (牵连运动) 和绕基点 A 的转动 (相对运动)。若取点 B 为基点, 这个位移可分解为: 线段 AB 随点 B 平行移动到位置 $B'A''$, 再绕点 B' 由位置 $B'A''$ 转动 $\Delta\varphi_2$ 角到达位置 $A'B'$ 。

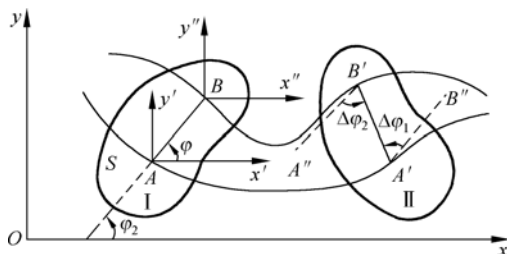


图 3-4 刚体平面运动的分解——平移和转动

取不同的基点, 由于曲线 AA' 和 BB' 轨迹一般不同, 所以就刚体的平移部分来说是不同的, 其速度和加速度也不相同。于是, 平面运动分解为平移和转动时, 其平移部分与基点选择有关。但对于转动部分, 由图 3-4 可知, 绕不同基点转过的角位移 $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$, 即大小、转向均相同。根据角速度的定义可知

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

因此,平面运动分解为平移和转动时,其转动部分与基点的选择无关。上式对时间求二阶导数,得平面图形的角加速度也相同。由于平移系相对定系无方位变化,故平面图形的相对转动量即为其绝对转动量,正因为如此,以后凡涉及平面运动图形相对转动的角速度和角加速度时,不必指明基点,而只说是平面图形的角速度和角加速度即可。

3.2 平面运动刚体上各点的速度分析

本节介绍求解平面运动刚体上各点速度的几种基本方法,包括基点法、速度投影定理法和瞬时速度中心法。

3.2.1 基点法

如图 3-5 所示,已知平面图形 S 上点 A 的速度 \mathbf{v}_A 及图形 S 的角速度 ω 。现在分析平面图形上任意点 B 的速度。以点 A 为基点,建立平移系 $Ax'y'$,将 S 的平面运动分解为跟随 $Ax'y'$ 的平移和相对于它的转动。这样,点 B 的绝对运动就被分解成:牵连运动(平移)和相对运动(圆周运动)。根据速度合成定理, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$,因为牵连速度即为基点的速度 $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_A$ (平移系上各点速度均相同),若记点 B 相对平移系的速度 \mathbf{v}_r 为 \mathbf{v}_{BA} ,则有

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \quad (3-2)$$

由以 \mathbf{v}_A 和 \mathbf{v}_{BA} 为边的速度平行四边形,可求得点 B 的速度 \mathbf{v}_B 。式(3-2)表明,平面图形上任意一点的速度等于基点的速度与该点对于基点为原点的平移系的相对速度的矢量和。这种确定平面图形上任意一点速度的方法称为基点法(method of base point)。

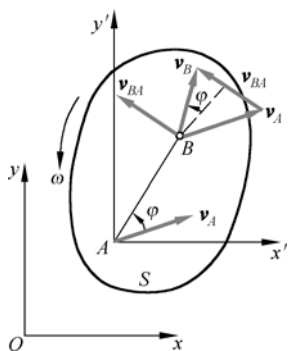


图 3-5 求平面运动各点速度的基点法

例题 3-1

在例题图 3-1(a)所示的曲柄连杆机构中,已知曲柄 OA 长 0.2 m ,连杆 AB 长 1 m , OA 以匀角速 $\omega = 10\text{ rad/s}$ 绕点 O 转动。求在图示位置滑块 B 的速度及杆 AB 的角速度。

分析: 本题中杆 AB 做平面运动,同时杆 AB 上的点 A 也是曲柄 OA 上的一点,因此可以选取点 A 为基点,利用基点法求解在图示位置滑块 B 的速度及杆 AB 的角速度。

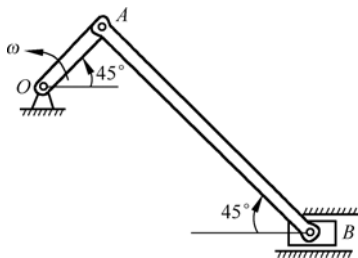
解:

由 OA 的转动可以求出点 A 速度 \mathbf{v}_A 的大小为

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.2 \times 10 = 2\text{ m/s}$$

\mathbf{v}_A 的方位垂直于 OA ,指向与 ω 转向一致。选取点 A 为基点,有

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$



例题图 3-1(a)

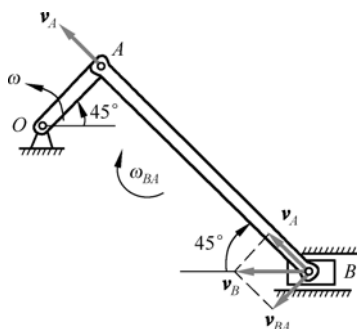
已知 v_B 沿水平方向，而 v_{BA} 垂直于 AB ，在点 B 处按上式作速度平行四边形，如例题图 3-1(b) 所示，得

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{0.707} = 2.83 \text{ m/s}$$

$$v_{BA} = v_B \sin 45^\circ = 2.83 \times 0.707 = 2 \text{ m/s}$$

从而可求出杆 AB 的角速度为

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2}{1} = 2 \text{ rad/s}$$



例题图 3-1(b)

3.2.2 速度投影定理法

将式(3-2)中各项分别向 A, B 两点连线 AB 上投影，如图 3-6 所示，得

$$[v_B]_{AB} = [v_A]_{AB} + [v_{BA}]_{AB}$$

因为刚体相对于基点 A 做定轴转动， v_{BA} 垂直于其半径 AB ，于是有

$$[v_{BA}]_{AB} = 0$$

所以

$$[v_B]_{AB} = [v_A]_{AB} \quad (3-3)$$

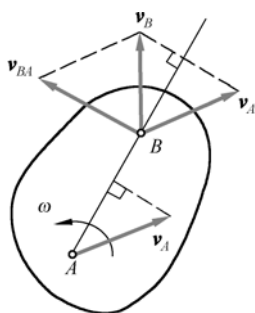


图 3-6 速度投影定理

该式表明，平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影相等，称为速度投影定理 (theorem of projections of the velocity)。该定理的含义也可以从另一个角度理解：平面图形是从刚体上截取的，图形上 A, B 两点的距离应保持不变。所以，这两点的速度在 AB 方向的分量必须相等，否则两点距离必将伸长或缩短。速度投影定理对所有的刚体运动形式都是适用的。应用速度投影定理分析平面图形上点的速度的方法称为速度投影定理法。

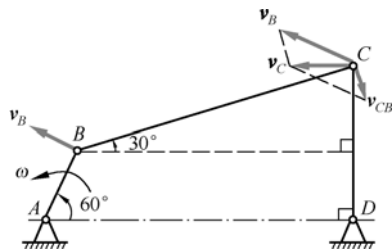
例题 3-2

如例题图 3-2 所示的四连杆机构 $ABCD$ ，已知曲柄 AB 长 20 cm，转速为 45 r/min，杆 CD 长 40 cm。求在图示位置杆 BC 和 CD 的角速度。

分析：本题中 AB 和 CD 两杆为定轴转动， AB 转动的角速度已知，所以 v_B 的大小和方向都已知，而 v_C 的方向已知，大小未知。因为杆 BC 为平面运动，所以选 BC 为研究对象。由速度投影定理可知， v_C 和 v_B 在杆 BC 上的投影相等，据此求得 v_C ，并最终获得杆 BC 和杆 CD 的角速度。

解：

应用速度投影定理， v_B 和 v_C 在 BC 连线上的投影相等，即



例题图 3-2

$$v_B \cos 60^\circ = v_C \cos 30^\circ$$

于是, 可得

$$v_C = v_B \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$$

其中

$$v_B = 20\omega = 20 \times \frac{45\pi}{30} = 30\pi \text{ cm/s}$$

得

$$v_C = 30\pi \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 54.4 \text{ cm/s}, \quad v_{CB} = v_C = 54.4 \text{ cm/s}$$

于是, 杆 CD 的角速度为

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{CD} = \frac{54.4}{40} = 1.36 \text{ rad/s}$$

杆 BC 的角速度为

$$\omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC}$$

其中

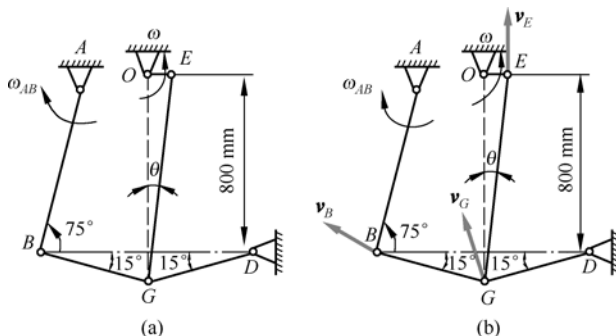
$$BC = 2(CD - AB \sin 60^\circ) = 2 \times (40 - 20 \sin 60^\circ) = 45.4 \text{ cm}$$

所以

$$\omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{54.4}{45.4} = 1.2 \text{ rad/s}$$

例题 3-3

矿石轧碎机的活动夹板 AB 长 600 mm, 由曲柄 OE 借连杆组带动, 使它绕轴 A 摆动, 如例题图 3-3(a)所示。曲柄 OE 长 100 mm, 角速度为 10 rad/s。连杆组由杆 BG 、杆 GD 和杆 GE 组成, 杆 BG 和杆 GD 各长 500 mm。求当机构在图示位置 (OE 和 BD 水平、 OG 铅垂) 时, 夹板 AB 的角速度。



例题图 3-3

分析：此机构由 5 个刚体组成：杆 OE 、杆 GD 和杆 AB 绕固定轴转动，杆 EG 和杆 BG 做平面运动。欲求杆 AB 的角速度 ω_{AB} ，必须先求出点 B 的速度大小，为此应先求点 G 的速度。杆 EG 做平面运动，点 E 的速度方向垂直于 OE ，点 G 在以 D 为圆心的圆弧上运动，因此速度方向垂直于 GD 。上述各点的速度方向都是已知，如例题图 3-3(b)所示，因此可利用速度投影定理求解。

解：

分别选取杆 EG 和杆 BG ，利用速度投影定理，可得

$$v_E \cos \theta = v_G \cos(15^\circ + \theta)$$

$$v_B = v_G \cos 60^\circ$$

其中

$$\tan \theta = \frac{OE}{OG}, \quad OG = 0.8 + GD \sin 15^\circ \text{ m}$$

所以，得

$$v_B = 0.533 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = 0.888 \text{ rad/s}$$

讨论：

对于做平面运动的刚体系，若已知刚体系上各点的运动速度方向，利用速度投影定理求解比利用基点法求解要简单得多。

3.2.3 瞬时速度中心法

瞬时速度中心的概念

假设在某瞬时，平面图形 S 上任意一点 A 的速度 \mathbf{v}_A 和平面图形的角速度 ω 已知，如图 3-7 所示。在平面图形上，过点 A 作垂直于该点速度 \mathbf{v}_A 的直线 AN 。以点 A 为基点，根据基点法，直线 AN 上任意一点 M 的速度为

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{MA} = \mathbf{v}_A - \omega \cdot \mathbf{MA}$$

可见，点 M 的速度大小与其位置有关。若在直线 AN 上选取一点 C ，并满足

$$AC = \frac{v_A}{\omega}$$

则根据基点法得点 C 的速度为

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_A - \omega \cdot \mathbf{AC} = 0$$

根据上述分析，可以得出如下结论：如果平面图形的角速度 $\omega \neq 0$ ，则在每一瞬时，运动的平面图形上都唯一存在一点，其速度等于零，该点称为**瞬时速度中心**（instantaneous center of velocity），简称**速度瞬心**，一般记为 C 。

瞬时速度中心的应用

若已知平面图形的角速度 ω 和在某瞬时的速度瞬心 C ，则能够以点 C 为基点，利用基点法分析图形上点 B 的速度。此时，基点速度 $v_C = 0$ ，于是

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BC} = \omega \times \mathbf{r}_{CB}$$

上式表明，图形上点 B 的绝对速度等于其相对于速度瞬心 C 的速度。如图 3-8 所示，线段 CB 上各点的速度大小依照该点至点 C 的距离呈线性分布，其速度方向垂直于线段 CB ，指向与图形的转动方向相一致。图中，线段 CA 与 CD 上各点的速度亦与上同。可见，就速度分布而言，图形在该瞬时的运动与假设它绕点 C 做瞬时定轴转动相类似。因此，速度瞬心概念对运动比较复杂的平面图形给出了清晰的运动图像：平面图形的瞬时运动为绕该瞬时的速度瞬心做瞬时转动，其连续运动为绕图形上一系列的速度瞬心做瞬时转动。同时，这也为分析平面图形上点的速度与图形的角速度提供了一种有效的方法。若已知图形的速度瞬心与角速度 ω ，则图形上各点的速度均可求出。

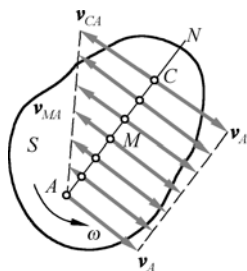


图 3-7 瞬时速度中心

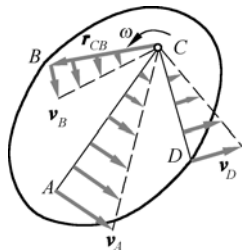


图 3-8 速度瞬心用于确定速度分布

确定平面运动刚体速度瞬心位置的常用方法

(1) 对于纯滚动的情形，此时，与固定面的接触点即为该瞬时的速度瞬心 C ，如图 3-9 所示。

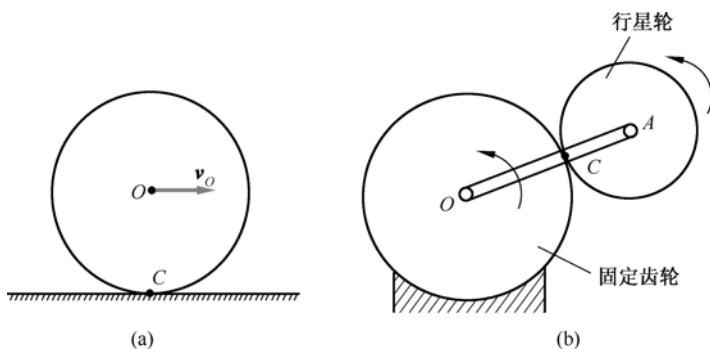


图 3-9 纯滚动时速度瞬心的确定

(2) 已知图形上任意两点 A, B 的速度方向，且不平行的，如图 3-10 所示，分别过 A, B 两点作 v_A, v_B 的垂线，其交点即为速度瞬心 C 。

(3) 已知图形上存在两点 A, B ，其速度方向平行，且垂直于 AB 连线，则速度瞬心 C 的位置如图 3-11 所示。此种情形还必须知道两个速度的大小。

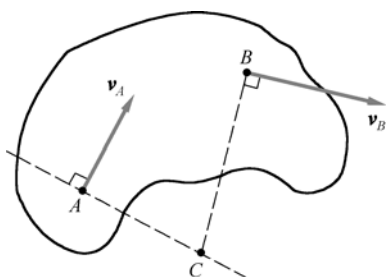


图 3-10 由任意两点速度方向（不平行）确定速度瞬心

(4) 对于瞬时平动的情形, 若某瞬时已知平面运动刚体上有两点的速度相互平行但与两点连线不垂直, 则此瞬时刚体上各点速度大小、方向必然全相同, 称为瞬时平动, 如图 3-12 所示。此时, 不存在速度瞬心, 或说瞬心在无穷远处。

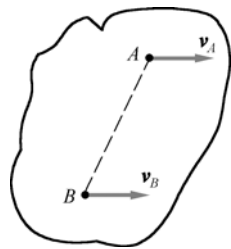
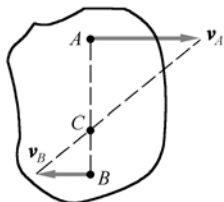
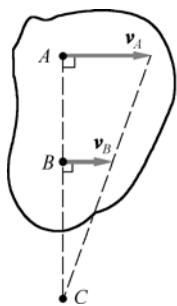


图 3-11 由任意两点速度（平行）确定速度瞬心

图 3-12 瞬时平动时不存在速度瞬心

说明:

① 在寻找速度瞬心时, 可以设想任意扩大平面图形, 因为在有些情形, 瞬心不在刚体上, 如一根直杆做平面运动时。

② 在不同瞬时, 速度瞬心可能为刚体上不同的点, 且该点加速度不为零, 因此瞬心法只能用来分析该瞬时刚体上各点的速度, 切不可用来分析刚体上各点的加速度。

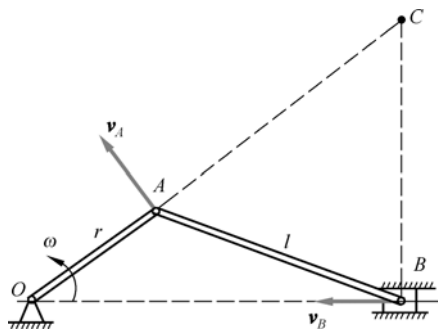
例题 3-4

如例题图 3-4(a)所示的曲柄连杆机构。已知 $OA = r$, $AB = l$, 求例题图 3-4(a)所示位置连杆 AB 的速度瞬心并分析 OA 在铅垂位置时连杆 AB 的运动特点。

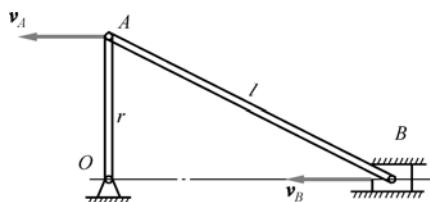
解:

首先, 分析各构件的运动。 OA 绕 O 做定轴转动, $v_A \perp OA$, 方向如例题图 3-4(a)所示; 杆 AB 做平面运动; 点 B 做直线运动; v_B 沿 OB 方向。属于已知两点速度方位, 过 A, B 两点分别作 v_A 和 v_B 的垂线, 其交点 C 即为图示瞬时的速度瞬心 C 。

当 OA 位于铅垂位置时, 其情形如例题图 3-4(b)所示。此时 $v_A \parallel v_B$, 但与 AB 不垂直, 所以, 此时 AB 做瞬时平动。



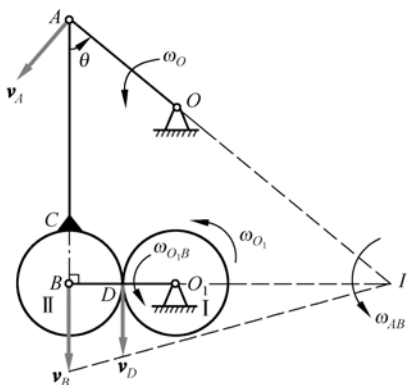
例题图 3-4(a)



例题图 3-4(b)

例题 3-5

在例题图 3-5 所示的传动系统中, 曲柄 OA 长 75 cm, 转动角速度 $\omega_O = 6 \text{ rad/s}$ 。 O_1B 杆绕轴 O_1 做定轴转动。在轴 O_1 上装有轮 I。轮 II 与杆 O_1B 在点 B 铰接。两个轮通过轮齿啮合在一起。杆 AC 固连于轮 II 上。两个轮的半径为: $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3} \text{ cm}$, $AB = 150 \text{ cm}$ 。求当 $\theta = 60^\circ$, 且 $CB \perp O_1B$ 时, 曲柄 O_1B 及齿轮 I 的角速度。



例题图 3-5

分析: 在该系统中, 四个刚体中有三个做定轴转动: OA , O_1B 和轮 I。只有 AB 做平面运动, 且 AB 与运动已知的杆 OA 及其他两个刚体有联系。只要求出 AB 上 B, D 两点的速度, 所要求的问题就解决了。由以上分析可知, 应选 AB 为研究对象, 并采用瞬心法。

解:

A, B 两点的速度方向已知, 作两点速度的垂线交于点 I , 此点即为 AB 的瞬心, 如例题图 3-5 所示。因为

$$AI = \frac{AB}{\cos \theta}$$

所以

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AI} = \frac{OA}{AB} \omega_O \cos 60^\circ = \frac{75 \times 6}{150 \times 2} = 1.5 \text{ rad/s}$$

杆 O_1B 的角速度为

$$\begin{aligned} \omega_{O_1B} &= \frac{v_B}{O_1B} = \frac{\omega_{AB} \cdot BI}{O_1B} = \frac{\omega_{AB} \cdot AB \tan \theta}{O_1B} \\ &= \frac{1.5 \times 150}{2 \times 30\sqrt{3}} \tan 60^\circ = 3.75 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

轮 I 的角速度为

$$\begin{aligned} \omega_{O_1} &= \frac{v_D}{r_1} = \frac{\omega_{AB} \cdot (BI - r_2)}{r_1} \\ &= \frac{1.5 \times (150 \times \tan 60^\circ - 30\sqrt{3})}{30\sqrt{3}} = 6 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

讨论:

如果采用基点法分析, 本例的计算过程要复杂得多。读者可以自己尝试分析比较。

3.3 平面运动刚体上各点的加速度分析

本节介绍如何利用基点法求解平面运动刚体上各点的加速度。

如图 3-13 所示, 已知做平面运动的刚体上任意一点 A 的加速度以及刚体的角速度和角加速度。以 A 为基点建立平动动系, 取 B 为动点。点 A 的加速度一般可表示为

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau$$

设平面图形的角速度为 ω , 角加速度为 α , 点 B 相对于点 A 做圆周运动, 则点 B 相对于点 A 的相对加速度为

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau$$

式中, \mathbf{a}_{BA}^τ 与 \mathbf{a}_{BA}^n 分别为点 B 相对于点 A 的切向加速度与法向加速度, 其大小分别为

$$a_{BA}^n = r\omega^2, \quad a_{BA}^\tau = r\alpha$$

式中, \mathbf{r} 为点 A 指向点 B 的矢量。另外, 也可将点 B 相对于点 A 的切向加速度与法向加速度用矢量表示为

$$\mathbf{a}_{BA}^n = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{a}_{BA}^\tau = \alpha \times \mathbf{r}$$

于是, 由加速度合成定理可得

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^\tau + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau \quad (3-4)$$

式(3-4)表明, 平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与该点对以基点为原点的平移系的相对切向加速度与相对法向加速度的矢量和。

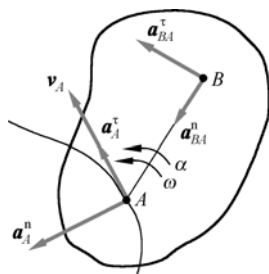


图 3-13 求解平面运动刚体各点加速度的基点法

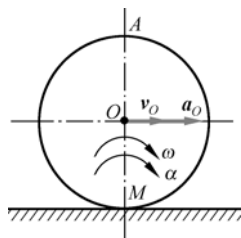
例题 3-6

半径为 R 的车轮沿平直地面无滑动地滚动。在某瞬时, 车轮轴心点 O 的加速度为 \mathbf{a}_O , 速度为 \mathbf{v}_O , 如例题图 3-6(a)所示。求此刻车轮最高点 A 与最低点 M 的加速度。

分析: 车轮沿平直地面做无滑动的滚动, 属于平面运动, 与地面的接触点 M 为轮的速度瞬心。由于轴心 O 的加速度、车轮的角速度和角加速度均已知, 若求点 M 和点 A 的加速度, 可选轮心 O 为基点, 分别计算此刻车轮最高点 A 与最低点 M 的加速度。

解:

该瞬时轮的角速度为



例题图 3-6(a)

$$\omega = \frac{v_O}{OM} = \frac{v_O}{R}$$

将上式对时间求导, 得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\dot{v}_O}{R} = \frac{a_O}{R}$$

由式(3-4), 可得点 A 的加速度为

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}^{\tau} + \mathbf{a}_{AO}^n$$

式中, \mathbf{a}_{AO}^{τ} 和 \mathbf{a}_{AO}^n 的大小分别为

$$a_{AO}^{\tau} = OA \cdot \alpha = R \cdot \frac{a_O}{R} = a_O, \quad a_{AO}^n = OA \cdot \omega^2 = R \cdot \left(\frac{v_O}{R}\right)^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

方向如例题图 3-6(b)所示。于是, 点 A 加速度的大小为

$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{(a_O + a_{AO}^{\tau})^2 + (a_{AO}^n)^2} \\ &= \sqrt{(a_O + a_O)^2 + \left(\frac{v_O^2}{R}\right)^2} = \sqrt{4a_O^2 + \frac{v_O^4}{R^2}} \end{aligned}$$

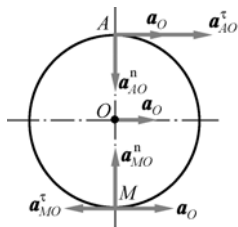
同理, 点 M 的加速度为

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{MO}^{\tau} + \mathbf{a}_{MO}^n$$

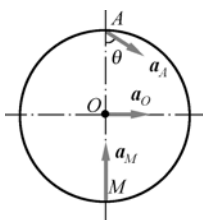
式中, \mathbf{a}_{MO}^{τ} 和 \mathbf{a}_{MO}^n 如例题图 3-6(b)所示。于是, 点 M 加速度的大小为

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{(a_O - a_{MO}^{\tau})^2 + (a_{MO}^n)^2} \\ &= \sqrt{(a_O - a_O)^2 + \left(\frac{v_O^2}{R}\right)^2} = \frac{v_O^2}{R} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

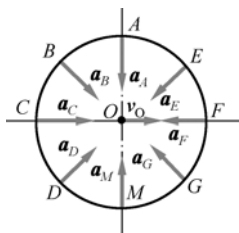
A, M 两点加速度的方向如例题图 3-6(c)所示。



例题图 3-6(b)



例题图 3-6(c)



例题图 3-6(d)

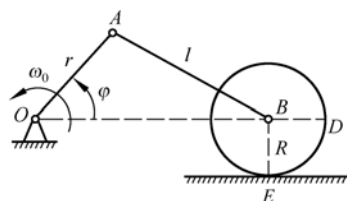
讨论:

本例的结果表明, 平面运动刚体的瞬时心 M 的速度为零, 但加速度不为零。这也正是瞬时转动和定轴转动的根本区别。若轮心 O 做等速运动, $a_O = 0$, 则轮缘上各点的加速度分布如例题图 3-5(d)所示, 即大小均相等, 且指向轮心。请读者思考, 此时的加速度是“绝对法向加速度”吗?

例题 3-7

在图 3-7(a)所示的机构中, 曲柄 OA 长 r , 以 ω_0 做等角速度转动。连杆 AB 长 $l = \sqrt{2}r$, 带动滚轮 B 沿直线轨道做无滑动的滚动, 滚轮半径 $R = \frac{1}{2}r$ 。

求当 $\varphi = 45^\circ$ 时: (1) 滚轮 B 的角速度 ω_B 及轮上点 E 和点 D 的速度 v_E 和 v_D ; (2) 滚轮 B 的角加速度 α_B 及轮上点 E 和点 D 的加速度 a_E 和 a_D 。



例题图 3-7(a)

分析: 机构具有一个自由度, 杆 AB 及轮 B 均做平面运动, 解题的关键是分析点 B 的速度与加速度。

解:

(1) 速度分析。

杆 AB 做平面运动, $v_A = r\omega_0$, 方向垂直于 OA , v_B 沿水平方向, 如例题图 3-7(b)所示, 应用速度投影定理, 得

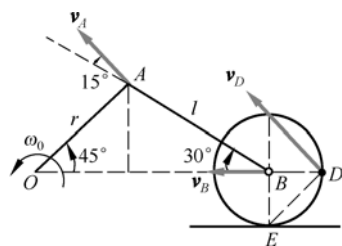
$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 15^\circ$$

$$v_B = 1.115r\omega_0$$

轮 B 做无滑动的滚动, 接触点处 $v_E = 0$, E 为轮 B 的瞬时速度中心, 于是有

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = 2.23\omega_0 \quad (\text{逆时针})$$

$$v_D = \sqrt{2}R\omega_B = 1.577r\omega_0$$



例题图 3-7(b)

v_D 的方向垂直于 ED 连线。

对于杆 AB , 将 v_A, v_B 向与 AB 垂直的方向投影, 有

$$v_B \sin 30^\circ = v_{BA} - v_A \sin 15^\circ$$

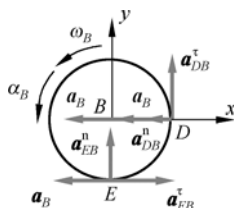
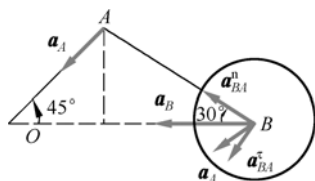
$$v_{BA} = v_B \sin 30^\circ + v_A \sin 15^\circ = 0.816r\omega_0$$

由此, 可得杆 AB 的角速度 ω_{AB} 为

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_{BA}}{\sqrt{2}r} = 0.577\omega_0 \quad (\text{顺时针})$$

(2) 加速度分析。

首先, 采用基点法分析点 B 的加速度, 如例题图 3-7(c)所示。



例题图 3-7(c)

考虑杆 AB , 已知 $a_A = r\omega_0^2$, 以 A 为基点, B 为动点, 则有

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau \quad (\text{a})$$

式中

$$a_{BA}^n = l\omega_{AB}^2 = \sqrt{2}r\omega_0^2 = 0.471r\omega_0^2$$

a_{BA}^τ 大小未知, 方向与 AB 垂直。

将式(a)向 AB 投影, 则有

$$a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 75^\circ + a_{BA}^n$$

得

$$a_B = 0.843r\omega_0^2$$

再考虑轮 B 。轮 B 做纯滚动, 其角加速度可根据角加速度的定义 $\alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt}$ 求得, 即

$$\alpha_B = \frac{a_B}{R} = 1.686\omega_0^2 \quad (\text{逆时针})$$

轮上点 B 的加速度已知, 以点 B 为基点, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{DB}^n + \mathbf{a}_{DB}^\tau = -(a_B + R\omega_B^2)\mathbf{i} + R\alpha_B\mathbf{j} \\ &= -3.332r\omega_0^2\mathbf{i} + 0.843r\omega_0^2\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{EB}^n + \mathbf{a}_{EB}^\tau = \mathbf{a}_{EB}^n = R\omega_B^2\mathbf{j} = 2.489r\omega_0^2\mathbf{j}$$

讨论:

(1) 本题是一个自由度的机构, 但有三个构件, 分析时一般从主动件逐步向从动件推进, 尤其要着重分析各构件的连接点, 如本题的点 A 和点 B 。

(2) 本题将求解过程分为两步, 先进行速度分析, 根据各构件运动的特点, 分别采用了速度投影定理及瞬时速度中心方法, 物理概念清楚, 计算过程简捷。后进行加速度分析, 采用基点法, 方法规范。这种分两步求解的方法, 在分析平面运动问题时是经常使用的。

(3) 在本题中, 所求的速度和加速度都是某一个特定瞬时的值。但所用的方法也可用于求解任意一个瞬时的值, 即求速度与加速度的时间函数。为此, 只需对例题图 3-7(c) 在任意 φ 情况下进行分析即可。当然, 在求速度及加速度时会遇到复杂的几何关系, 但可以避免列写运动方程及烦琐的求导过程。

(4) 轮 B 沿直线轨道做纯滚动, 轮缘上点 E 的轨迹是旋轮线(摆线), 当点 E 与轨道接触时, 点 E 落在轨迹的尖点处。这时点 E 的加速度方向沿接触面的法线方向, 但速度沿轨迹的切线方向。

例题 3-8

例题图 3-8(a)所示的是一个平面四连杆机构, 已知曲柄 O_1A 以匀角速度 $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ 绕轴 O_1 转动, 各杆的尺寸为 $O_1A = 10 \text{ cm}$, $AB = 25 \text{ cm}$, $O_2B = 17 \text{ cm}$ 。图示位置 AB 水平。(1) 试求机构在图示状态时的角速度 ω_{AB} 和 ω_{O_2B} , 以及角加速度 α_{AB} 和 α_{O_2B} ; (2) 若四连杆机构中的

支承轴 O_2 不是固定点, 而是按 $x_{O_2} = 10\sin 2t$ cm 的规律运动, 试求机构在图示状态 $x_{O_2} = 8$ cm 时的角速度 ω_{AB} 和 ω_{O_2B} , 以及角加速度 α_{AB} 和 α_{O_2B} 。

分析: 本题中, 杆 AB 做平面运动, 可以通过建立点 A, B 的速度与加速度间的关系来求解。

解:

(1) 四连杆机构具有一个自由度, 分析连接点 A 和点 B 的运动, 如例题图 3-8(b)所示, 则

$$\mathbf{v}_A = -O_1A \cdot \omega_1 \mathbf{i} = -30\mathbf{i} \text{ cm/s}$$

$$\mathbf{a}_A = -O_1A \cdot \omega_1^2 \mathbf{j} = -90\mathbf{j} \text{ cm/s}^2$$

首先进行速度分析, 以 A 为基点, B 为动点, 则有

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (\text{a})$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{AB} \quad (\text{b})$$

式(a)中, 只有 \mathbf{v}_B 与 $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ 的大小未知, 故可解。将式(a)向轴 x, y 投影, 如例题图 3-8(b)所示, 可求得

$$\mathbf{v}_B = -30\mathbf{i} - 16\mathbf{j} \text{ cm/s}$$

进一步可得

$$v_B = 34 \text{ cm/s}, \quad v_{BA} = -16\mathbf{j} \text{ cm/s}$$

故

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{16}{25} \text{ rad/s (逆时针)}$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_B}{O_2B} = \frac{34}{17} = 2 \text{ rad/s (逆时针)}$$

下面进行加速度分析。因为

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^\tau$$

所以, 式(b)可改写成

$$\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^\tau = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{AB} \quad (\text{c})$$

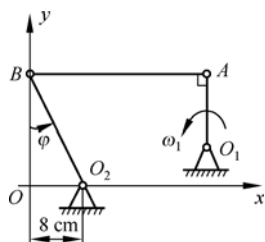
将式(c)分别向轴 x, y 投影, 如例题图 3-8(c)所示, 可得

$$-a_B^\tau \cos \varphi + a_B^n \sin \varphi = a_{BA}^n, \quad -a_B^\tau \sin \varphi - a_B^n \cos \varphi = a_{BA}^\tau - a_A$$

所以, 可得

$$a_B^\tau = \frac{1}{\cos \varphi} (a_B^n \sin \varphi - a_{BA}^n) = 24.66 \text{ cm/s}^2$$

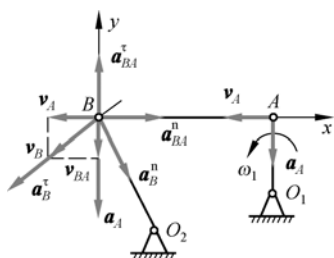
$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= a_A - a_B^\tau \sin \varphi - a_B^n \cos \varphi \\ &= 90 - 24.66 \frac{8}{17} - 17 \times 2^2 \times \frac{15}{17} = 18.395 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$



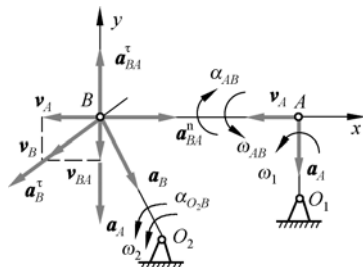
例题图 3-8(a)

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{18.395}{25} = 0.7358 \text{ rad/s}^2 \text{ (顺时针)}$$

$$\alpha_{O_2B} = \frac{a_B^{\tau}}{O_2B} = \frac{24.66}{17} = 1.4506 \text{ rad/s}^2 \text{ (逆时针)}$$



例题图 3-8(b)



例题图 3-8(c)

(2) 第二种机构如例题图 3-8(d)所示, 此时机构具有两个自由度。\$O_2\$ 滑块沿轴 \$x\$ 的运动规律已给定, 即

$$x_{O_2} = 10 \sin 2t \text{ cm}$$

由于图示位置 \$x_{O_2} = 8 \text{ cm}\$, 所以 \$\sin 2t = \frac{4}{5}\$。相应地, \$\cos 2t = \pm \frac{3}{5}\$。

同时, 可求得滑块 \$O_2\$ 的速度为

$$\dot{x}_{O_2} = 20 \cos 2t = \pm 12 \text{ cm/s}$$

取 \$\dot{x}_{O_2} = 12 \text{ cm/s}\$, 如例题图 3-8(d)所示。滑块 \$O_2\$ 的加速度为

$$\ddot{x}_{O_2} = -40 \sin 2t = -32 \text{ cm/s}^2$$

机构中杆 \$AB\$ 及杆 \$O_2B\$ 均做平面运动。分别从主动件曲柄 \$O_1A\$ 及滑块 \$O_2\$ 着手分析, 且已知两个平面运动杆件上各自的一点 \$A\$ 及 \$O_2\$ 的轨迹、速度和加速度, 通过对两个杆件连接点 \$B\$ 的运动分析, 即可求得两个平面运动杆件的角速度及角加速度。

分别以 \$A\$ 及 \$O_2\$ 为基点, 则点 \$B\$ 的速度可表示为

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_{O_2} + \mathbf{v}_{BO_2} \quad (\text{d})$$

即

$$\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_{O_2B} \times \mathbf{r}_{O_2B}$$

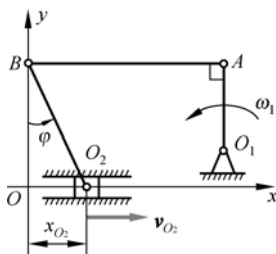
式中, 仅 \$\boldsymbol{\omega}_{AB}\$ 及 \$\boldsymbol{\omega}_{O_2B}\$ 大小未知。将式(d)向例题图 3-8(e)所示的轴 \$\xi\$ 投影, 可得

$$v_A \sin \varphi - v_{BA} \cos \varphi = -v_{O_2} \sin \varphi$$

故

$$v_{BA} = \frac{1}{\cos \varphi} (v_A + v_{O_2} \sin \varphi)$$

$$v_{BA} = (30 + 12) \frac{8}{15} = \frac{112}{5} \text{ cm/s}$$



例题图 3-8(d)

将式(d)向 x 方向投影, 可得

$$-v_A = v_{O_2} - v_{BO_2} \cos \varphi$$

故

$$v_{BO_2} = \frac{1}{\cos \varphi} (v_{O_2} + v_A) = \frac{17}{15} (12 + 30) = \frac{238}{5} \text{ cm/s}$$

下面继续分析点 B 的加速度。点 B 的加速度可表示为

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\tau} + \mathbf{a}_{BA}^n = \mathbf{a}_{O_2} + \mathbf{a}_{BO_2}^{\tau} + \mathbf{a}_{BO_2}^n \quad (\text{e})$$

即

$$\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_{AB}^2 \cdot \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{a}_{O_2} + \boldsymbol{\alpha}_{O_2B} \times \mathbf{r}_{O_2B} - \omega_{O_2B}^2 \cdot \mathbf{r}_{O_2B}$$

将式(e)投影于轴 ξ , 如例题图 3-8(f)及例题图 3-8(g)所示, 可得

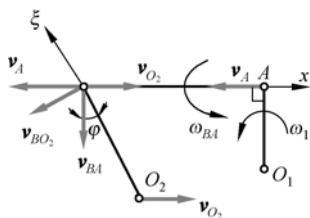
$$-a_A \cos \varphi + a_{BA}^{\tau} \cos \varphi - a_{BA}^n \sin \varphi = a_{O_2} \sin \varphi - a_{BO_2}^n$$

故

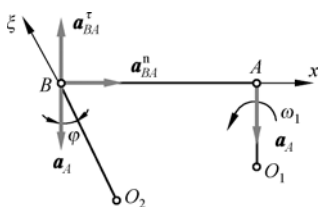
$$\begin{aligned} a_{BA}^{\tau} &= \frac{1}{\cos \varphi} (a_{O_2} \sin \varphi - a_{BO_2}^n + a_A \cos \varphi + a_{BA}^n \sin \varphi) \\ &= \frac{17}{15} \left[32 \times \frac{8}{17} - \left(\frac{238}{5} \right)^2 \times \frac{1}{17} + 90 \times \frac{15}{17} + \left(\frac{112}{5} \right)^2 \times \frac{1}{25} \times \frac{8}{17} \right] \\ &= -33.28 \text{ cm/s}^2 \quad (\text{方向与图示相反}) \end{aligned}$$

将式(e)向 x 轴方向投影, 可得

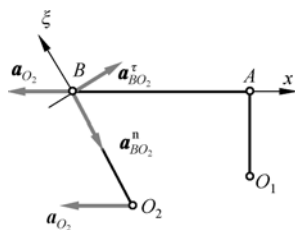
$$a_{BA}^n = -a_{O_2} + a_{BO_2}^{\tau} \cos \varphi + a_{BO_2}^n \sin \varphi$$



例题图 3-8(e)



例题图 3-8(f)



例题图 3-8(g)

故

$$a_{BO_2}^{\tau} = \frac{1}{\cos \varphi} (a_{BA}^n + a_{O_2} - a_{BO_2}^n \sin \varphi) = -12.07 \text{ cm/s}^2$$

根据上述结果, 两个连杆的角速度及角加速度分别为

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = 0.896 \text{ rad/s} \quad (\text{逆时针})$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = -1.33 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{逆时针})$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_{BO_2}}{O_2B} = 2.8 \text{ rad/s} \quad (\text{逆时针})$$

$$\alpha_{O_2B} = \frac{a_{BO_2}^{\tau}}{O_2B} = -0.71 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{逆时针})$$

讨论:

(1) 本例中对每一点同时分析速度及加速度,故都用了基点法。当然,也完全可以分两步求解,并在速度分析中采用其他可能更为简便的方法。

(2) 本例中第1个问题的求解过程,是求解单自由度杆系机构各瞬态运动量的典型过程。以下几点值得注意:① 分析路径,即分析从主动件向从动件逐个推进的过程;② 分析重点,即对构件相互连接点的运动分析;③ 充分利用机构提供的已知条件,例如,点B轨迹已知,因而点B加速度的切向分量 a_B^t 和法向分量 a_B^n 的方位已确定,加之对点B的速度已进行了分析,即 a_B^n 的大小已求得,故只有 a_B^t 的大小未知;④ 将矢量式向某轴投影,其中矢量与轴正向间的夹角为锐角或钝角决定了各矢量的投影带有“+”号或“-”号。

(3) 在本例的第2个问题中,机构是两个自由度的杆系,因此分析路径从两个主动件——曲柄 O_1A 和滑块 O_2 开始,各自向从动件推进,重点仍是分析连接点的运动。在分析滑块 O_2 的运动时,用点的运动学分析方法,求出滑块的速度和加速度。然后,利用两个基点,分析同一个动点的运动并进行求解。

(4) 从求解杆AB、杆 O_2B 的角速度和角加速度的关系式看,式中均涉及相对速度及相对加速度,即有

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB}, \quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{AB}$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_{BO_2}}{O_2B}, \quad \alpha_{O_2B} = \frac{a_{BO_2}^t}{O_2B}$$

但是,由这些关系式求得的角速度、角加速度却都是绝对的。

3.4 运动学综合应用

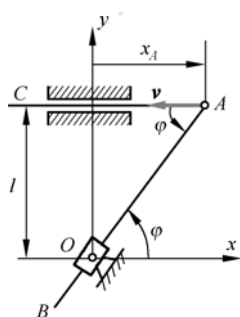
工程中的机构都是由多个物体组成的,各物体间通过连接点来传递运动。为了分析某点的运动,若能找出其位置与时间的函数关系,则可直接建立运动方程,用解析方法求其运动全过程的速度和加速度。当难以建立点的运动方程或只对机构某些瞬时位置的运动参数感兴趣时,可根据刚体各种不同的运动形式,确定此刚体的运动与其上一点运动的关系,并常用合成运动或平面运动的理论来分析相关的两个点之间在某瞬时速度或加速度的联系。

平面运动理论用来分析同一平面运动刚体上两个不同点之间的速度或加速度的联系。当两个刚体相接触且有相对滑动时,需要用合成运动的理论分析不同刚体上相关点之间的速度或加速度的联系。

分析复杂机构运动时,可能同时有平面运动和点的合成运动,应注意分别分析、综合应用有关理论。有时同一问题可能有多种分析方法,应经过分析、比较后,选用较简便的方法求解。下面通过几个例题说明这些方法的综合应用。

例题 3-9

如例题图 3-9(a)所示的平面机构，杆 AC 在导轨中以匀速 v 平动，通过铰链 A 带动杆 AB 沿套筒 O 运动，套筒 O 可绕轴 O 转动，与杆 AC 之间的距离为 l 。图示瞬时杆 AB 与杆 AC 夹角为 $\varphi = 60^\circ$ ，求此瞬时杆 AB 的角速度及角加速度。



例题图 3-9(a)

分析：本题中杆 AB 做平面运动，同时它相对于套筒 O 还存在相对运动。下面用两种方法求解，一种是应用点的速度和加速度合成定理及刚体平面运动的速度和加速度分析求解；另一种方法是通过列写运动方程求解。

解：

方法 1：

以 A 为动点，动系固连在导套 O 上，牵连运动为绕 O 的转动。点 A 的绝对运动为以匀速 v 沿 AC 方向的直线运动，相对运动是点 A 沿导套 O 的中轴线的直线运动，杆 AB 的相对运动为沿 AB 方向的平动，各速度矢量如例题图 3-9(b)所示。

由速度合成定理 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ ，可得

$$v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

$$v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

由于杆 AB 在导套 O 中滑动，因此杆 AB 与导套 O 具有相同的角速度及角加速度，其角速度为

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$

由于点 A 为匀速直线运动，故绝对加速度为零。又因点 A 的相对运动为沿导套 O 的直线运动，因此 \mathbf{a}_r 沿杆 AB 方向，故由加速度合成定理得

$$0 = \mathbf{a}_e^{\tau} + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (\text{a})$$

式中， $\mathbf{a}_C = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$ ， $\omega_e = \omega_{AB}$ ，其方向如例题图 3-9(c)所示，大小为

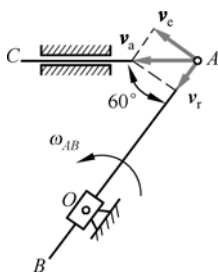
$$a_C = 2\omega_e v_r = \frac{3v^2}{4l}$$

\mathbf{a}_e^{τ} 、 \mathbf{a}_e^n 及 \mathbf{a}_r 的方向如例题图 3-9(c)所示，由加速度合成定理式(a)可求得

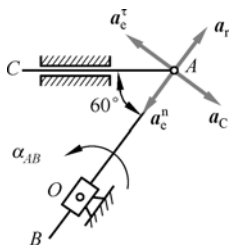
$$a_e^{\tau} = a_C$$

于是

$$\alpha_{AB} = \frac{a_e^{\tau}}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2} \quad (\text{方向为逆时针})$$



例题图 3-9(b)



例题图 3-9(c)

方法 2:

以点 O 为坐标原点, 建立如例题图 3-9(a)所示的直角坐标系。由图可知

$$x_A = l \cot \varphi$$

将其两端对时间求导, 并注意到 $\dot{x}_A = -v$, 得

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin^2 \varphi$$

将其再对时间求导, 得

$$\ddot{\varphi} = \frac{v\dot{\varphi}}{l} \sin 2\varphi = \frac{v^2}{l^2} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi$$

上述两式为杆 AB 的角速度 $\dot{\varphi}$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}$ 与角 φ 之间的关系式。当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 得

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{3v}{4l}$$

$$\alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

可见, 两种解法的结果相同。

讨论:

(1) 根据机构特点, 恰当地建立定轴转动动坐标系, 将平面运动分解为定轴转动和平动, 并按点的复合运动方法解题, 这样, 某些机构的运动分析就变得较为简捷。

(2) 本题中, 杆 AB 做平面运动, AB 上与 O 相重合的点的速度应沿杆 AB 方向。因此, 也可应用瞬心法求解杆 AB 的角速度。然而, 再用平面运动基点法求解杆 AB 的角加速度就不如前两种方法方便了。

(3) 本题中, 若欲求例题图 3-9(a)所示瞬时杆 AB 上与套筒点 O 相重合的点 O' 的轨迹曲率半径, 则应如何求解? 请读者思考。

例题 3-10

如例题图 3-10(a)所示的平面机构, 杆 AB 长为 l , 滑块 A 可沿摇杆 OC 的长槽滑动。摇杆 OC 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动, 滑块 B 以匀速 $v_B = \omega l$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时杆 OC 铅直, AB 与水平线 OB 夹角为 30° 。求此瞬时杆 AB 的角速度及角加速度。

分析: 杆 AB 做平面运动, 点 A 又在摇杆 OC 内有相对运动, 这是具有两个自由度的系统, 是含两个运动输入参量 ω 和 v 的较复杂的机构运动问题。欲求此瞬时杆 AB 的角速度及角加速度, 还需要分析点 A 的运动。

解:

(1) 杆 AB 的角速度分析。

以 B 为基点, 根据速度合成定理, 有

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB} \quad (\text{a})$$

点 A 在杆 OC 内滑动, 因此需要用点的合成运动方法。取点 A 为动点, 动系固连在 OC 上, 有

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & & (\text{b}) \\ \text{大小} & ? & \checkmark \quad ? \\ \text{方向} & ? & \checkmark \quad \checkmark \end{array}$$

式中, 绝对速度 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A$, 大小、方向均未知, 而牵连速度 $\mathbf{v}_e = OA \cdot \omega = \frac{l\omega}{2}$, 相对速度 \mathbf{v}_r 大小未知。各速度矢量方向如例题图 3-10(a) 所示。

由式(a)和式(b), 得

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (\text{c})$$

式中, \mathbf{v}_B 为已知, \mathbf{v}_e 已求得, 且 \mathbf{v}_{AB} 和 \mathbf{v}_r 的方向已知, 仅有 \mathbf{v}_{AB} 及 \mathbf{v}_r 两个量的大小未知, 故可解。将此矢量方程沿 \mathbf{v}_B 方向投影, 得

$$v_B - v_{AB} \sin 30^\circ = v_e$$

所以

$$v_{AB} = 2(v_B - v_e) = \omega l$$

杆 AB 的角速度方向如例题图 3-10(a) 所示, 大小为

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{AB} = \omega$$

将式(c)沿 \mathbf{v}_r 方向投影, 得

$$v_r = v_{AB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega l$$

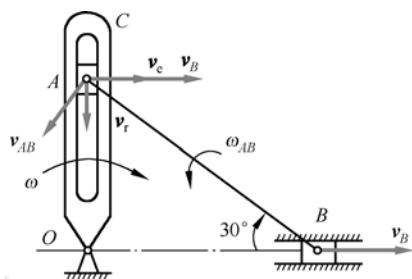
(2) AB 杆的角加速度分析。

以 B 为基点, 则点 A 的加速度为

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^{\tau} + \mathbf{a}_{AB}^n \quad (\text{d})$$

由于 \mathbf{v}_B 为常量, 所以 $\mathbf{a}_B = 0$, 而

$$\mathbf{a}_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega^2 l$$



例题图 3-10(a)

所以仍以 A 为动点, 设动系固连于 OC 上, 则有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (\text{e})$$

式中

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_A, \quad \mathbf{a}_e^\tau = 0, \quad \mathbf{a}_e^n = \omega^2 \cdot OA = \frac{\omega^2 l}{2}, \quad \mathbf{a}_C = 2\omega v_r = \sqrt{3}\omega^2 l$$

由(d)和(e)两式, 得

$$\mathbf{a}_{AB}^\tau + \mathbf{a}_{AB}^n = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (\text{f})$$

式中, 各矢量方向已知, 如例题图 3-10(b)所示, 仅有两个未知量 \mathbf{a}_r 和 \mathbf{a}_{AB}^τ 的大小待求。取投影轴垂直于 \mathbf{a}_r , 将矢量方程式(f)在此轴上投影, 得

$$a_{AB}^\tau \sin 30^\circ - a_{AB}^n \cos 30^\circ = a_C$$

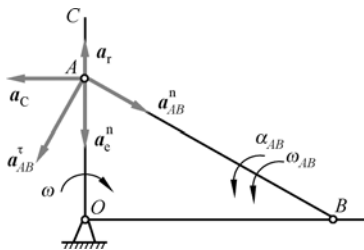
由此得

$$a_{AB}^\tau = 3\sqrt{3}\omega^2 l$$

于是, 杆 AB 的角加速度为

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = 3\sqrt{3}\omega^2$$

方向如例题图 3-10(b)所示。



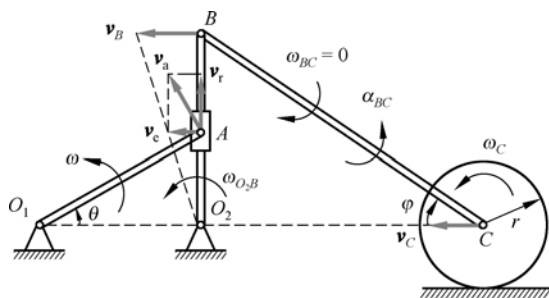
例题图 3-10(b)

讨论:

对于系统传动问题, 一般从连接点分析入手。对于具有两个自由度的系统, 矢量式(a)和式(b)中均含有 3 个未知量, 因此, 不能只从 1 个矢量式中得到全部解, 需要两者联立。对于杆系问题, 无法从定义 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ 中导出 α 计算公式, 必须先求出 \mathbf{a}_{AB}^τ , 再计算 α_{AB} 。

例题 3-11

平面机构如例题图 3-11(a)所示, 杆 O_1A 绕 O_1 以匀角速度 ω 转动, $O_1A = O_2B = l$, $BC = 2l$, 轮 $R = \frac{l}{4}$ 。试求: 当 $\theta = 30^\circ$ 、杆 O_2B 铅垂时, 轮 C 的角速度 ω_C 和角加速度 α_C 。



例题图 3-11(a)

分析: (1) 运动分析: 杆 O_1A 和杆 O_2B 为定轴转动; 杆 BC 和轮为平面运动; 套筒 A 和杆 O_2B 之间为点的合成运动。(2) 速度分析: 速度分析分两步进行——先求解点的合成运动, 再求平面运动。

解:

(1) 先由套筒 A 和杆 O_2B 之间点的合成运动开始计算。

选套筒 A 为动点, 动系固连在杆 O_2B 上, 由速度合成定理得

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r & & (a) \\ \text{方向} & \sqrt{\quad} & \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ \text{大小} & \sqrt{\quad} & ? \quad ? \end{array}$$

式中, $v_a = v_A = O_1A \cdot \omega$, $\mathbf{v}_a \perp O_1A$; $\mathbf{v}_e = O_2A \cdot \omega_{O_2B}$, 未知, $\mathbf{v}_e \perp O_2B$; \mathbf{v}_r 大小未知, $\mathbf{v}_r \perp O_2B$ 。

作速度合成平行四边形, 如例题图 3-11(a)所示, 由几何关系得

$$\begin{aligned} v_r &= v_a \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l \omega = 0.866 l \omega \\ v_e &= v_a \cos 60^\circ = 0.5 l \omega \end{aligned}$$

据此, 得杆 O_2B 的角速度为

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_e}{O_2A} = \frac{0.5 l \omega}{0.5 l} = \omega \quad (b)$$

(2) 研究杆 BC 的平面运动。

因为 $\mathbf{v}_B \parallel \mathbf{v}_C$, 所以 BC 做瞬时平动, 且有

$$\omega_{BC} = 0, \quad (\text{此时 } \alpha_{BC} = 0), \quad v_C = v_B$$

式中, $v_B = O_2B \cdot \omega_{O_2B} = l \omega$ 。于是

$$v_C = l \omega \quad (c)$$

故轮 C 的角速度为

$$\omega_C = \frac{v_C}{R} = \frac{l \omega}{R/4} = 4 \omega \quad (d)$$

(3) 加速度分析。

与速度分析类似, 也分为两步。根据加速度合成定理, 有

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^{\tau} + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (\text{e})$$

大小	√	?	√	?	√
方向	√	√	√	√	√

式中, $a_a = a_A = a_A^n = l\omega^2$, 沿 O_1A , 指向 A ; $a_e^n = O_2A \cdot \omega_{O_2B}^2 = l\sin 30^\circ \cdot \omega^2 = \frac{l}{2}\omega^2$, 沿 O_2A 指向 O_2 ; $a_e^{\tau} = O_2A \cdot \alpha_{O_2B} = l\sin 30^\circ \cdot \alpha_{O_2B} = \frac{l}{2}\alpha_{O_2B} = ?$, $\mathbf{a}_e^{\tau} \perp O_2A$, 指向待定 (假设向左, α_{O_2B} 假设为逆时针); a_r 大小未知, 沿 O_2A , 指向待定 (先设为向上); $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$, $a_C = 2\omega_{O_2B} \cdot v_r = 2\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega = \sqrt{3}l\omega^2$, $\mathbf{a}_C \perp \mathbf{v}_r$ (向左)。

将式(e)分别投影到 x, y 轴上, 得到

$$-a_A \cos 30^\circ = -a_e^{\tau} - a_C$$

$$-a_A \sin 30^\circ = -a_e^{\tau} - a_r$$

由此, 得

$$-l\omega^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{l}{2}\alpha_{O_2B} - \sqrt{3}l\omega^2$$

$$-l\omega^2 \times \frac{1}{2} = -\frac{l}{2}\omega^2 + a_r$$

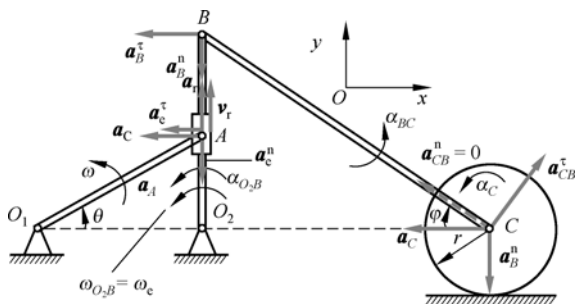
于是

$$\alpha_{O_2B} = -\sqrt{3}\omega^2 \text{ (顺时针); } a_r = 0$$

再以杆 BC (平面运动) 为研究对象, 求 \mathbf{a}_C, α_C 。加速度分析如例题图 3-11(b) 所示, 其中

$$\mathbf{a}_B^{\tau} = O_2B \cdot \alpha_{O_2B} = l \cdot \alpha_{O_2B} = -\sqrt{3}l\omega^2, \text{ 沿 } O_2B \text{ (向右)}$$

$$\mathbf{a}_B^n = O_2B \cdot \omega_{O_2B}^2 = l \cdot \omega^2, \text{ 沿 } O_2B, \text{ 指向 } O_2$$



例题图 3-11(b)

以 B 为基点, 由加速度合成定理得

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B^{\tau} + \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_{CB}^{\tau} + \mathbf{a}_{CB}^n \quad (\text{f})$$

$$\text{大小: } ? \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad ? \quad 0$$

$$\text{方向: } \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad 0$$

式中, \boldsymbol{a}_C 沿水平方向; $\boldsymbol{a}_{CB}^n = BC \cdot \omega_{BC}^2 = 0$; $\boldsymbol{a}_{CB}^\tau = BC \cdot \alpha_{BC} = 2l \cdot \alpha_{BC}$, 未知, $\boldsymbol{a}_{CB}^\tau \perp BC$ 。

将式(f)分别向 x, y 轴投影, 得

$$-a_C = -a_B^\tau + a_{CB}^\tau \cdot \cos 60^\circ$$

$$0 = -a_B^n + a_{CB}^\tau \cdot \sin 60^\circ$$

由此, 得

$$a_C = -\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l\omega^2$$

$$a_{CB}^\tau = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}$$

轮 C 的角加速度为

$$\alpha_C = \frac{a_C}{r} = -\frac{l\omega^2}{r} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{l\omega^2}{r} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{\sqrt{3}}\omega^2 \quad (\text{顺时针})$$

本章小结

(1) 正确判断刚体的运动类型是否属于平面运动。

(2) 研究刚体平面运动的基本方法有: ① 分析法——建立运动方程式; ② 运动分解法。

(3) 运动分析的基点法: 在平面图形上任意取一点作为基点, 建立平移动系, 将平面图形的运动分解为跟随基点的平动(牵连运动)和相对于基点的定轴转动(相对运动)。即刚体的平面运动 = 平动(跟随基点) + 转动(绕基点)。

(4) 速度分析的基点法: 应用速度合成定理; 选取基点, $\boldsymbol{v}_e \equiv \boldsymbol{v}_{\text{基点}}$ (牵连运动为平动)。即

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{\text{基点}} + \boldsymbol{v}_r$$

(5) 速度分析的另外两种方法(由基点法推论): ① 速度投影定理法, ② 瞬时速度中心法。

(6) 加速度分析的基点法: ① $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_{\text{基点}}$; ② 平移动系: 科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C \equiv 0$; ③ 应用加速度合成定理: $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{\text{基点}} + \boldsymbol{a}_r$ 。

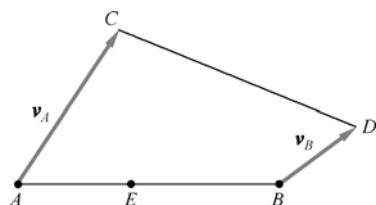
思考题

3-1 杆 AB 做平面运动, 图示瞬时 A, B 两点的速度 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ 的大小、方向均已知, C, D 两点分别是 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ 的矢端, 如思考题图 3-1 所示。试问:

- (1) 杆 AB 上各点速度矢量的端点是否都在直线 CD 上?
- (2) 对杆 AB 上任意一点 E , 设其速度矢端为 H , 则点 H 在什么位置?

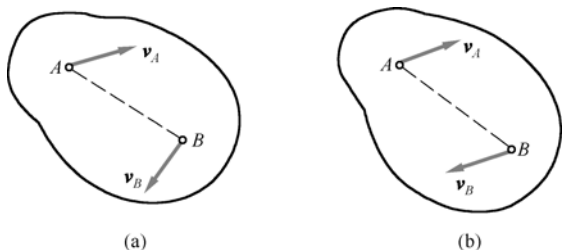
(3) 设杆 AB 无限长, 它与 CD 的延长线交于点 P , 试判断下述说法是否正确。

- ① 点 P 的瞬时速度为零;
- ② 点 P 的瞬时速度必不为零, 其速度矢端必在直线 AB 上;
- ③ 点 P 的瞬时速度必不为零, 其速度矢端必在 CD 的延长线上。



思考题图 3-1

3-2 如思考题图 3-2 所示, 平面图形上两点 A, B 的速度方向可能是这样的吗? 为什么?

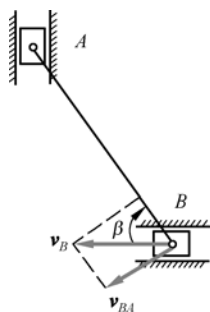


思考题图 3-2

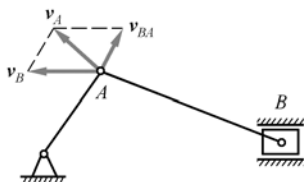
3-3 下列各题的计算过程中有没有错误? 为什么?

(1) 如思考题图 3-3(a)所示, 已知 v_B , 则

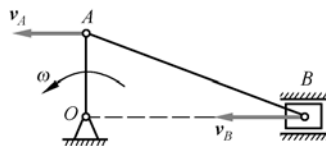
$$v_{BA} = v_B \sin \beta$$



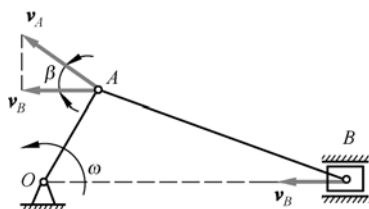
(a)



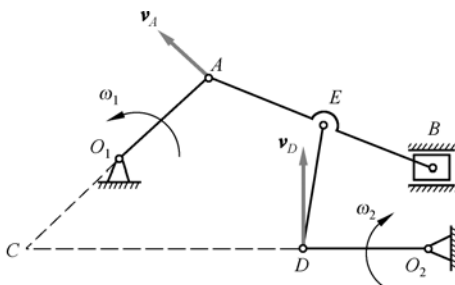
(b)



(c)



(d)



(e)

思考题图 3-3

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_B \sin \beta}{AB}$$

(2) 如思考题图 3-3(b)所示, 已知 v_A , 则

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

速度四边形如图所示。

(3) 如思考题图 3-3(c)所示, 已知 ω = 常量, $OA = r$, $v_A = \omega r$ = 常量, 在图示瞬时, $v_A = v_B$, 即 $v_B = \omega r$ = 常量, 所以

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = 0$$

(4) 如思考题图 3-3(d)所示, 已知 $v_A = \omega \cdot OA$, 所以

$$v_B = v_A \cos \beta$$

(5) 如思考题图 3-3(e)所示, 已知 $v_A = \omega_1 \cdot O_1A$, 方向如图; v_D 垂直于 O_2D 。于是可确定速度瞬心 C 的位置, 求得

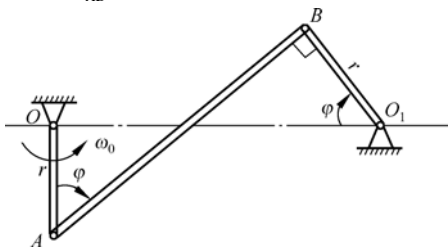
$$v_D = \frac{v_A}{AC} \cdot CD$$

$$\omega_2 = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{v_A}{AC} \cdot \frac{CD}{O_2D}$$

习 题

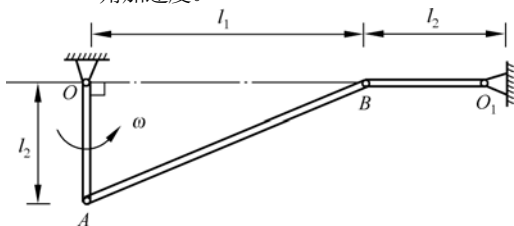
基本题

- 3-1 在习题图 3-1 所示四连杆机构中, 已知匀角速度 ω_O , $OA = O_1B = r$ 。试求在 $\varphi = 45^\circ$ 且 $AB \perp O_1B$ 的图示瞬时, 连杆 AB 的角速度 ω_{AB} 及点 B 的速度。



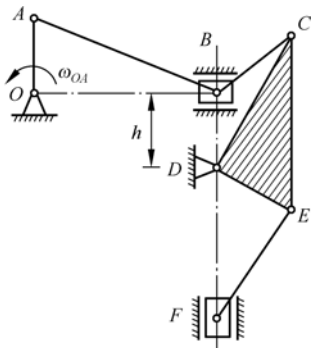
习题图 3-1

- 3-2 在习题图 3-2 所示四连杆机构中, 已知 $OA = O_1B = l_2 = 0.3$ m, 匀角速度 $\omega = 2$ rad/s。在图示瞬时, $OB = l_1 = 1$ m, 且杆 OA 铅直、杆 O_1B 水平。试求该瞬时杆 O_1B 的角速度和角加速度。



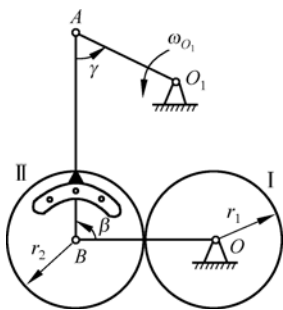
习题图 3-2

- 3-3 习题图 3-3 所示机构中, 已知 $OA = 0.1$ m, $DE = 0.1$ m, $EF = 0.1\sqrt{3}$ m, D 距 OB 线为 $h = 0.1$ m; $\omega_{OA} = 4$ rad/s。在图示位置时, 曲柄 OA 与水平线 OB 垂直; 且 B, D 和 F 在同一铅直线上。又 DE 垂直于 EF 。求杆 EF 的角速度和点 F 的速度。



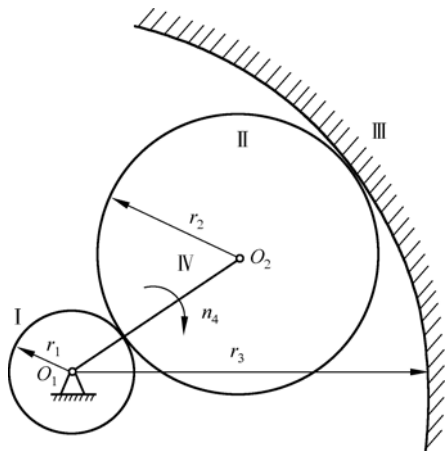
习题图 3-3

- 3-4 在瓦特行星传动机构中, 平衡杆 O_1A 绕轴 O_1 转动, 并借连杆 AB 带动曲柄 OB ; 而曲柄 OB 活动地装置在轴 O 上, 如习题图 3-4 所示。在轴 O 上装有齿轮 I, 齿轮 II 与连杆 AB 固连于一体。已知 $r_1 = r_2 = 0.3\sqrt{3}$ m, $O_1A = 0.75$ m, $AB = 1.5$ m; 又平衡杆的角速度 $\omega_{O_1} = 6$ rad/s。求当 $\gamma = 60^\circ$ 且 $\beta = 90^\circ$ 时, 曲柄 OB 和齿轮 I 的角速度。



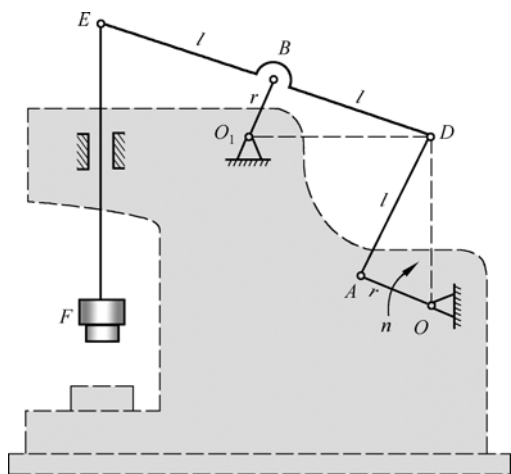
习题图 3-4

- 3-5 使砂轮高速转动的装置如习题图 3-5 所示。杆 O_1O_2 绕轴 O_1 转动, 转速为 n_4 。 O_2 处用铰链连接一个半径为 r_2 的活动齿轮 II, 杆 O_1O_2 转动时, 轮 II 在半径为 r_3 的固定内齿轮 III 上滚动, 并使半径为 r_1 的轮 I 绕轴 O_1 转动。轮 I 上装有砂轮, 随轮 I 高速转动。已知 $\frac{r_3}{r_1} = 11$, $n_4 = 900$ r/min。求砂轮的转速。



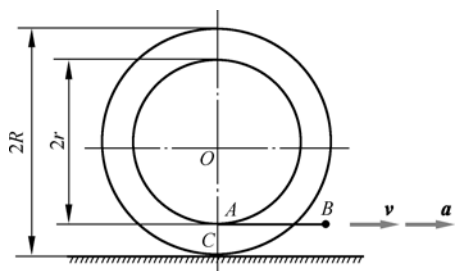
习题图 3-5

- 3-6 小型精压机的传动机构如习题图 3-6 所示，
 $OA = O_1B = r = 0.1 \text{ m}$ ， $EB = BD = AD = l = 0.4 \text{ m}$ 。在图示瞬时， $OA \perp AD$ ， $O_1B \perp ED$ ， O_1D 在水平位置， OD 和 EF 在铅直位置。已知曲柄 OA 的转速 $n = 120 \text{ r/min}$ ，求此时压头 F 的速度。



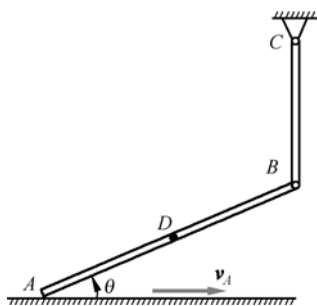
习题图 3-6

- 3-7 半径为 R 的轮子沿水平面滚动而不滑动，如习题图 3-7 所示。在轮上有圆柱部分，其半径为 r 。将线绕于圆柱上，线的 B 端以速度 v 和加速度 a 沿水平方向运动。求轮的轴心 O 的速度和加速度。



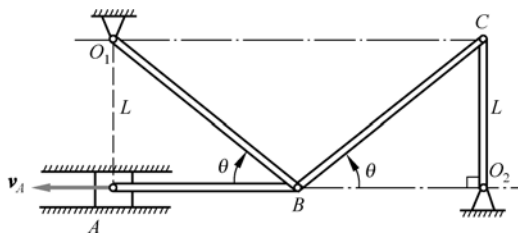
习题图 3-7

- 3-8 在习题图 3-8 所示平面机构中，已知 $BC = 5 \text{ cm}$ ， $AB = 10 \text{ cm}$ ，点 A 以匀速度 $v_A = 10 \text{ m/s}$ 沿水平运动，方向向右；在图示瞬时， $\theta = 30^\circ$ ，杆 BC 处于铅垂位置。试求该瞬时：(1) 点 B 的加速度；(2) 杆 AB 的角加速度；(3) 杆 AB 中点 D 的加速度。



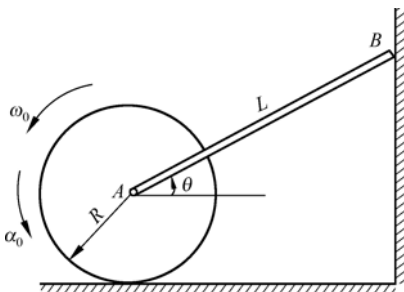
习题图 3-8

- 3-9 平面机构在习题图 3-9 所示 $\theta = 30^\circ$ 位置时，杆 AB 及杆 O_2C 分别处于水平和铅垂位置， O_1A 为铅垂线， $O_1A = O_2C = L = 10 \text{ cm}$ ， $v_A = 8 \text{ cm/s}$ ， $\alpha_A = 0$ 。试求此瞬时：(1) 连杆 BC 的角速度 ω_{BC} ；(2) 杆 O_2C 的角速度 ω_2 ；(3) 杆 O_1B 的角加速度 α_1 。



习题图 3-9

- 3-10 半径为 R 的圆盘沿水平地面做纯滚动，细杆 AB 长为 L ，杆端 B 可沿铅垂墙滑动。在习题图 3-10 所示瞬时，已知圆盘的角速度为 ω_0 ，角加速度为 α_0 ，杆与水平面的夹角为 θ 。试求该瞬时杆端 B 的速度和加速度。

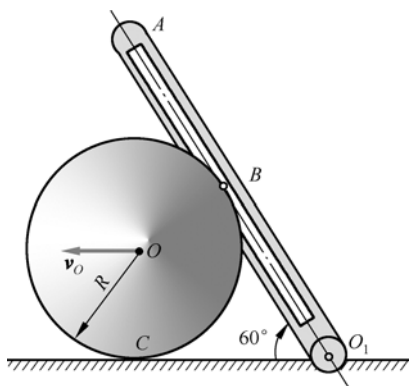


习题图 3-10

提高题

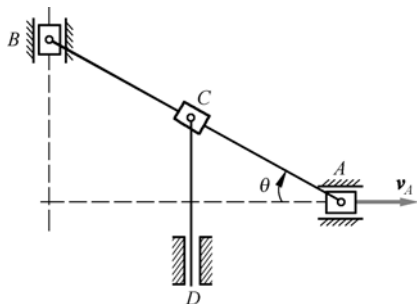
- 3-11 如习题图 3-11 所示，轮 O 在水平面上滚动而不滑动，轮心以匀速 $v_O = 0.2 \text{ m/s}$ 运动。轮缘上固连销钉 B ，此销钉在摇杆

O_1A 的槽内滑动, 并带动摇杆绕轴 O_1 转动。已知轮的半径 $R = 0.5 \text{ m}$, 在图示位置时, AO_1 是轮的切线, 摇杆与水平面的夹角为 60° 。求摇杆在该瞬时的角速度和角加速度。



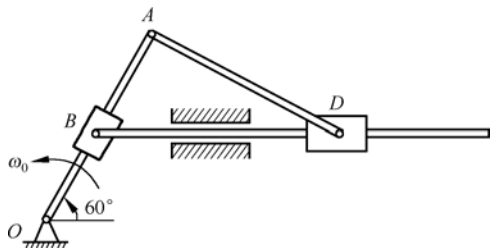
习题图 3-11

3-12 已知图示机构中滑块 A 的速度为常值, $v_A = 0.2 \text{ m/s}$, $AB = 0.4 \text{ m}$ 。在习题图 3-12 所示位置 $AB = BC$, $\theta = 30^\circ$ 。求该瞬时杆 CD 的速度和加速度。



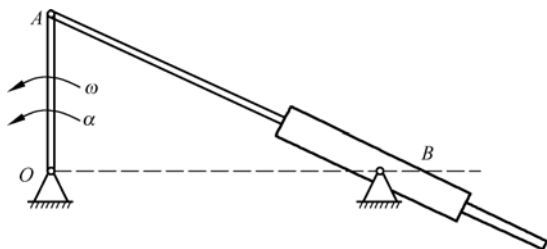
习题图 3-12

3-13 平面机构的曲柄 OA 长为 $2a$, 以角速度 ω_0 绕轴 O 转动。在图示位置时, $AB = BO$ 且 $\angle OAD = 90^\circ$ 。求此时套筒 D 相对于杆 BC 的速度。



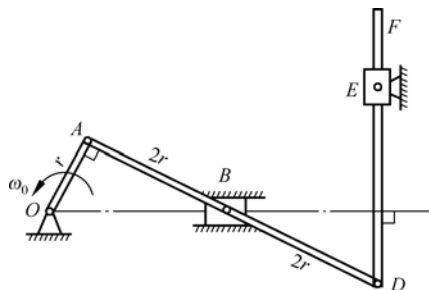
习题图 3-13

3-14 曲柄导杆机构的曲柄 OA 长 120 mm , 在习题图 3-14 所示位置 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 曲柄的角速度 $\omega = 4 \text{ rad/s}$, 角加速度 $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$ 。试求此时导杆 AC 的角加速度及导杆相对于套筒 B 的加速度。设 $OB = 160 \text{ mm}$ 。



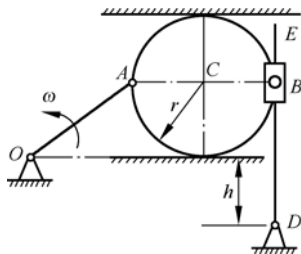
习题图 3-14

3-15 在如习题图 3-15 所示的机构中, 曲柄 OA 以等角速度 ω_0 做定轴转动, 并带动连杆 ABD 及 DF 运动, E 处为一个有固定铰支承的套筒, 它可绕点 E 摆动。已知机构尺寸为 $OA = r$, $AB = BD = 2r$, 且在图示位置时, $DE = \sqrt{5}r$ 。试求此瞬时杆 DF 的角速度及角加速度。



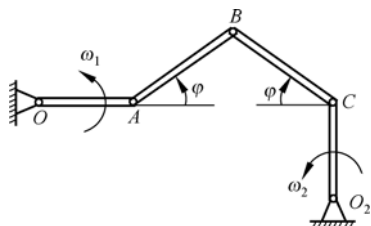
习题图 3-15

3-16 平面机构如习题图 3-16 所示。套筒在轮缘上点 B 铰接, 并可绕 B 转动, 杆 DE 穿过套筒。已知 $r = h = 20 \text{ cm}$, $OA = 40 \text{ cm}$ 。在图示位置时, 直径 AB 水平, 杆 DE 铅垂, 杆 OA 的角速度 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 。试求该瞬时杆 DE 的角速度和角加速度。



习题图 3-16

- 3-17 在习题图3-17所示平面机构中, 各杆均长 L 。已知 $\omega_1 = \sqrt{3}\omega_0$, $\omega_2 = \omega_0$ (ω_0 为常量)。图示瞬时 $\varphi = 30^\circ$, OAC 在同一水平线上, CO_2 铅直。试求此瞬时 B 的速度和加速度。

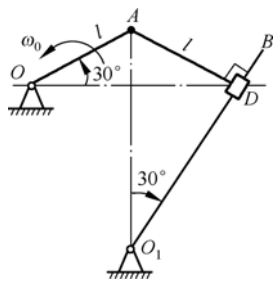


习题图 3-17

研究性题

- 3-18 如习题图3-18所示曲柄摇臂机构中, 曲柄 OA 以等角速度 ω_0 绕轴 O 转动, 滑套 D 可沿摇臂

O_1B 滑动, 杆 AD 的 A 端与 OA 铰接, D 端与滑套固连, 且杆 AD 与套筒轴线正交。已知 $OA = AD = l$ 。试求图示位置时, 摆臂 O_1B 的角速度及角加速度。(要求可尽量多设计几种解题的方案, 并比较各种方法的特点。)



习题图 3-18

第 4 章

虚位移原理

在静力学里，主要用矢量的方法研究刚体和刚体系统的平衡问题，这部分内容也称为**矢量静力学**（vector statics）。由矢量静力学建立的平衡条件，对于刚体的平衡是必要和充分的，但对于变形体来说，就不一定总是充分的；而且应用这些平衡条件，在求解非自由质点系（包括刚体和刚体系）的某些平衡问题时显得不够简便，例如，对于一些机构的平衡问题就是如此。

分析静力学（analytical statics）则用数学分析的方法来研究非自由质点系（包括刚体和刚体系）的平衡规律。本章首先介绍一些基本概念，然后叙述分析静力学中的重要原理，即虚位移原理。由虚位移原理给出的平衡条件，对于任意非自由质点系的平衡都是必要和充分的，它是求解静力平衡问题的有效而普遍的方法。此外，虚位移原理在变形体力学中也有广泛的应用。

4.1 约束、虚位移、虚功

本节介绍有关分析静力学的基本概念，包括约束与约束方程、广义坐标与自由度数、虚位移及虚功。

约束与约束方程

一个质点系，当它的运动受到某些限制时，是非自由的。对质点系位置或速度的限制条件称为**约束**（constraint），表示这种限制条件的数学方程称为**约束方程**（equations of constraint）。约束方程的形式可表示为

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_i) = 0 \text{ 或 } f_{\alpha}(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, \dots, s) \quad (4-1)$$

式中， $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 为质点系中第 i 个质点的位置矢径， α 为约束数。

如图 4-1 所示的曲柄滑块机构，曲柄长 $OA = R$ ，连杆长 $AB = l$ 。该系统由 3 个物体组成，曲柄 OA 上的点 A 做圆周运动，它到点 O 的距离为 R ，滑块 B 被限制在滑道内运动，连杆 AB 的长度不变。因此，该系统有三个约束方程，即

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = R^2 \\ y_B = 0 \\ (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2 \end{cases}$$

通常，可以将约束按不同的分类标准分为如下几类。

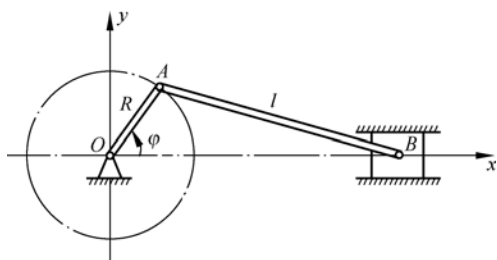
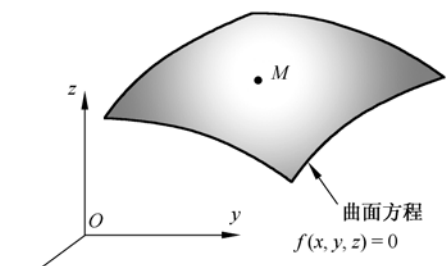


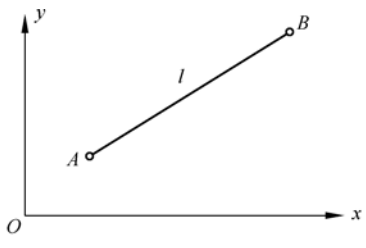
图 4-1 曲柄滑块机构

1. 几何约束与运动约束

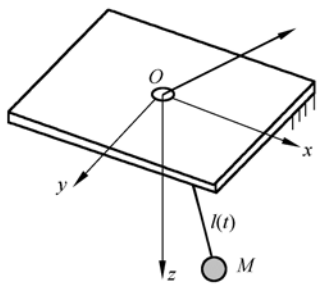
限制质点系几何位置的约束称为几何约束 (geometric constraint), 如图 4-2(a)、(b)、(c)、(f) 所示。限制质点系中各质点速度的约束称为运动约束 (kinetic constraint), 如图 4-2(d)、(e) 所示。



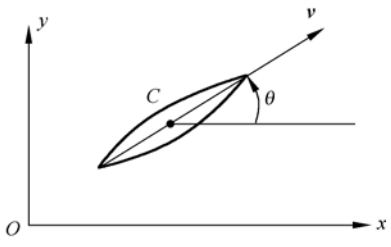
(a) 固定曲面上运动的质点



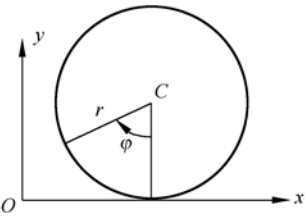
(b) 平面上两点用轻质杆相连



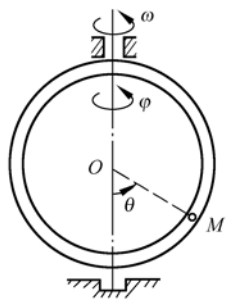
(c) 变长度球摆 $x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$



(d) 只沿纵向运动的冰刀
 $\dot{y}/\dot{x} = \tan\theta, \dot{y} - \dot{x}\tan\theta = 0$



(e) 圆轮沿直线轨道做纯滚动
 $\dot{x}_c - r\dot{\phi} = 0, x_c - r\phi = \text{常数}$



(f) 等速旋转圆环中的小球
 $\phi - \omega t = 0$

图 4-2 约束的分类

2. 稳定约束（定常约束）与不稳定约束（非定常约束）

约束方程中不显含时间 t 的约束称为稳定约束或定常约束（steady constraint），如图 4-2(a)、(b)、(d)、(e) 所示。约束方程中显含时间 t 的约束称为不稳定约束或非定常约束（unsteady constraint），如图 4-2(c)、(f) 所示。

3. 完整约束与非完整约束

约束方程中无论是否包含质点速度，只要约束方程可以积分，这种约束便称为完整约束（holonomic constraint），如图 4-2(a)、(b)、(c)、(e)、(f) 所示。约束方程中包含质点速度，而且约束方程不可积分，这种约束则称为非完整约束（nonholonomic constraint），如图 4-2(d) 所示。

广义坐标与自由度

唯一确定质点系在空间位置或构形的独立坐标称为广义坐标（generalized coordinates），记为 q 。广义坐标必须是独立变量，它可以是线坐标、角坐标或其他形式的坐标。广义坐标的值完全确定了质点系的位形，因而各质点的矢径 \mathbf{r}_i 可用广义坐标表示

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \quad (4-2)$$

广义坐标形式的选择不是唯一的，需要由问题的性质与求解问题的难易程度而定。对于完整约束系统，广义坐标个数称为该系统的自由度（degree of freedom）。如果完整约束系统由 n 个质点组成，存在 s 个完整约束，则系统的自由度，即广义坐标个数为

$$N = 3n - s$$

该式表明，研究由 n 个质点组成的系统时，一般用 $3n$ 个直角坐标确定它的位置，但由于系统还具有完整约束，这 $3n$ 个直角坐标不是完全独立的。

广义坐标的引入，将确定位置的坐标数目减少到最小，也就是使描述力学系统的数学方程数目尽可能得少。而描述力学系统的数学方程数目，对于静力学就是平衡方程的数目，对于动力学就是运动微分方程数目。

比如，对于图 4-3 所示的由质点 A 、质点 B 、杆件及导轨连接成的曲柄滑块机构，有 A 和 B 两个质点，因此 $n=2$ ；有三个几何约束，因此 $s=3$ ，故约束方程为

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2, \quad (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2, \quad y_B = 0$$

所以，自由度数为

$$N = 2 \times 2 - 3 = 1$$

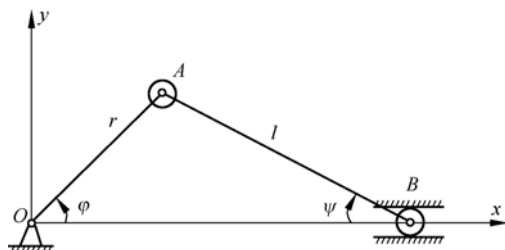


图 4-3 广义坐标与自由度

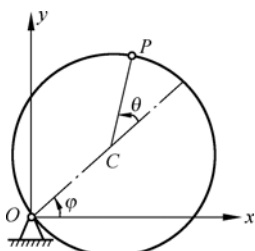
若选曲柄转角 φ 为广义坐标，由约束关系可得 A 和 B 两个质点的坐标为

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi$$

$$x_B = r \cos \varphi + l \cos \psi \quad (\text{且有 } \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi), \quad y_B = 0$$

例题 4-1

如例题图 4-1 所示, 大圆环绕 O 做定轴转动, 小环 P 可在大环上滑动。试分析以下几种情况的约束性质、自由度与广义坐标: (1) 大环上未作用外力偶, 两环在任意给定的起始条件下运动; (2) 大环上作用已知的力偶 M ; (3) 已知大环的运动规律 $\varphi = \omega t$; (4) 已知 $\varphi = at^2$ ($a = \text{常数}$)。



例题图 4-1

分析: 本题需要根据约束的分类方法及自由度与广义坐标的定义来判断。

解:

(1)和(2)均为稳定约束, 系统自由度为 2, 广义坐标 $q = (\varphi, \theta)^T$ 。

(3)和(4)均为非稳定约束, 系统自由度为: 2 (描述运动的坐标数) - 1 (非稳定约束数) = 1。广义坐标 $q = \theta$ 。

讨论:

(3)和(4)情况下分别给出的 $\varphi = \omega t$ 与 $\varphi = at^2$ 是非稳定约束。因为它们都是对系统运动预加的限制条件, 且此条件中显含时间 t 。当然, 在(3)和(4)情况下, 为了维持 $\varphi = \omega t$ 与 $\varphi = at^2$, 需要在大环上施加控制力矩。

虚位移与实位移

在给定瞬时, 质点或质点系被约束所容许的任何微小位移, 称为该质点或质点系的**虚位移** (virtual displacement), 以 $\delta \mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示, 如图 4-4 所示的各质点的虚位移。

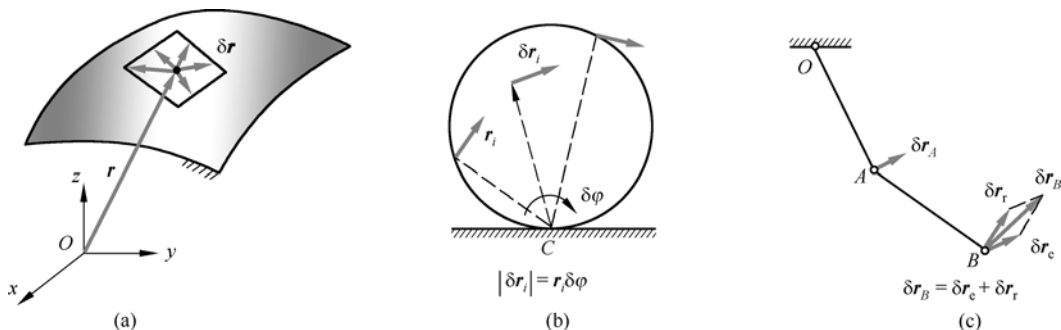


图 4-4 虚位移与实位移

虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 与实位移 $d\mathbf{r}_i$ 既有区别, 又有联系。二者都要符合约束条件, 即被约束所容许。但是, 实位移 $d\mathbf{r}_i$ 是在一定的主动力作用下、一定的起始条件下和一定的时间间隔 dt 内发生的位移, 其方向是唯一的; 而虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 则不涉及有无主动力, 也与起始条件无关, 是假想发生而实际并未发生的位移, 所以它不需经历时间过程, 其方向至少有两个, 甚至无穷多个。

图 4-5 所示的是三种质点系: 图 4-5(a) 是放置于二维固定斜面上质点 P 的情形, $\delta \mathbf{r} = (\delta r_1, \delta r_2)$;

图 4-5(b)是简化成二质点系统的曲柄滑块机构, $\delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r}_{A1}, \delta \mathbf{r}_{B1}, \delta \mathbf{r}_{A2}, \delta \mathbf{r}_{B2})$; 图 4-5(c)是放置于三维固定曲面上质点 P 的情形, $\delta \mathbf{r} = (\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2, \dots, \delta \mathbf{r}_n)$ 。这三种系统如果在一定的主动力作用下, 对于一定的起始条件, 在 dt 时间间隔内, 只可能产生一组真实位移 $d\mathbf{r}_i$, 它是各组虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 中的一组。但是, 对于非稳定约束, 例如在图 4-5(a)中, 若斜面也有运动, 则点 P 的真实位移 $d\mathbf{r}$ 将不再是两组虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 中的任何一组。

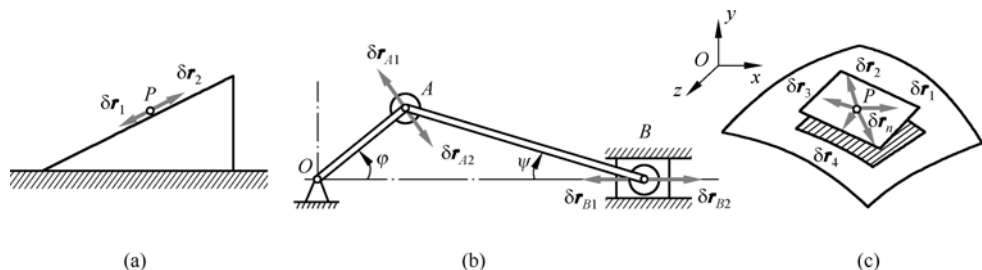


图 4-5 质点的虚位移分析

广义虚位移

虚位移记号“ δ ”是数学上的变分符号。在本书所讨论的问题中, 变分 (variation) 运算与微分 (differential) 运算相类似。质点系 (包括刚体) 的虚位移也可表示成广义坐标的变分 (variation of generalized coordinate) δq_j ($j=1, 2, \dots, N$), δq_j 称为广义虚位移 (generalized virtual displacement)。对于质点系统, 广义坐标 q_j 是独立变量。对于完整约束系统, δq_j ($j=1, 2, \dots, N$) 是独立的虚位移。

进一步地, 由约束方程

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

可以得到利用广义虚位移表示的虚位移为

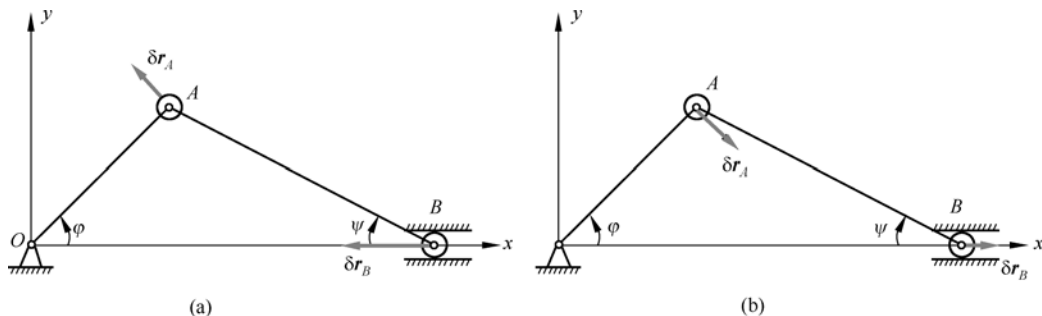
$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (4-3)$$

虚位移在直角坐标轴上的投影分别为

$$\delta x_i = \sum_j^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_j^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_j^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (4-4)$$

例题 4-2

求例题图 4-2 所示机构中质点 A 和 B 的虚位移。



例题图 4-2

分析：本题可以采用对点 A 和点 B 的直角坐标求变分的方式求解。

解：

点 A 和点 B 的坐标表达式分别为

$$\begin{aligned}x_A &= r \cos \varphi, & y_A &= r \sin \varphi \\x_B &= r \cos \varphi + l \cos \psi, & y_B &= 0\end{aligned}$$

其中， $\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi$ 。

对直角坐标求变分，可得虚位移的表达式为

$$\begin{aligned}\delta x_A &= -r \sin \varphi \delta \varphi, & \delta y_A &= r \cos \varphi \delta \varphi \\ \delta x_B &= -r \sin \varphi \delta \varphi - l \sin \psi \delta \psi = -r \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} \delta \varphi & \left(\delta \psi = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \psi} \delta \varphi \right) \\ \delta y_B &= 0\end{aligned}$$

虚功

作用在质点系上的力在相应虚位移上所做的功称为虚功 (virtual work)，又称为元功，用 δW 表示。

虚功与实功的计算方法相类似。力 \mathbf{F} 在虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 上所做的虚功为 $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$ ；力系 \mathbf{F}_i ($i=1, 2, \dots, n$) 中所有在各自作用点的虚位移上所做的虚功之和为

$$\sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (4-5)$$

与力偶 M 对应的虚位移是虚角位移，用 $\delta \theta$ 表示；相应的虚功 $\delta W = M \delta \theta$ 。对于平面力偶系 M_j ($j=1, 2, \dots, m$)，各力偶在各自的虚角位移 $\delta \theta_j$ 上所做的虚功之和为

$$\sum_{j=1}^m \delta W_j = \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j \quad (4-6)$$

式中， $\delta \theta_j$ 为与 M_j 相对应的对于定坐标系的虚角位移，即绝对虚位移。虚功与虚位移一样，也是假想发生的，而实际并未发生。 δW 一般并不是功函数的变分，仅是 $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ (或 $M_j \delta \theta_j$) 的记号。

理想约束

若约束力在质点系中与之相对应的任意一组虚位移上所做虚功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

式中， \mathbf{F}_{Ni} 为作用在第 i 个质点的约束力，此类约束称为理想约束 (ideal constraint)。

例如，在图 4-6 中，对于光滑曲面约束，约束力的虚功为

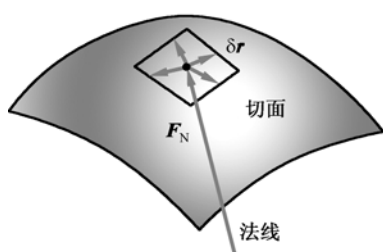
$$\delta W_N = \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

对于纯滚动约束，约束力的虚功为

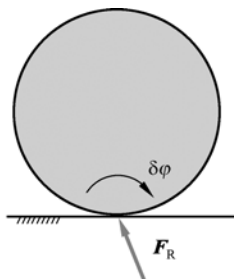
$$\delta W_N = \mathbf{F}_R \cdot \delta \mathbf{r}_A = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{0} = 0$$

对于不可伸长轻质杆约束，约束力的虚功为

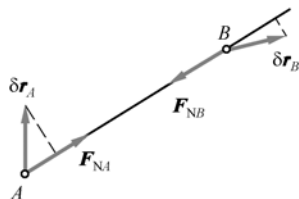
$$\begin{aligned} \delta W_N &= \mathbf{F}_{NA} \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{F}_{NB} \cdot \delta \mathbf{r}_B \\ &= \mathbf{F}_{NA} \cdot \delta \mathbf{r}_A - \mathbf{F}_{NA} \cdot \delta \mathbf{r}_B \\ &= \mathbf{F}_{NA} \cdot (\delta \mathbf{r}_A - \delta \mathbf{r}_B) = 0 \end{aligned}$$



(a) 光滑曲面



(b) 纯滚动



(c) 不可伸长轻质杆

图 4-6 理想约束

4.2 虚位移原理

对于具有理想、双侧约束的质点系，某一个符合约束的位置为平衡位置的充要条件是：在该位置上，主动力系在系统的任意一个虚位移上所做的虚功之和等于零。此即虚位移原理。对于由 n 个质点组成的质点系，虚位移原理可以表示为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4-7)$$

式中， \mathbf{F}_i 为作用在第 i 个质点上的主动力， $\delta \mathbf{r}_i$ 为该质点的虚位移。

对于由 n 个质点和 m 个做二维运动的刚体组成的质点-刚体系统，虚位移原理可以写成

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j = 0$$

式中， M_j 为作用在第 j 个刚体上的力偶的力偶矩矢量， $\delta \theta_j$ 为该刚体的虚角位移。

虚位移原理作为分析静力学的基本原理，反映了客观世界的基本规律，是不需要证明的；其正确性由根据它所导出的结论在实践中的检验而证实。但为了便于记忆，可做如下推导。

质点系中各质点平衡，即

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

上式点乘虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ ，再相加

$$\sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

由于理想约束满足

$$\sum \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

因而，得

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

虚位移原理的应用

利用虚位移原理进行平衡分析可遵循以下步骤。

(1) 判断系统的约束性质，如为非理想约束，则将其约束力作为主动力。分析自由度，选择广义坐标。如为结构需要而将其约束解除变为机构。

(2) 给系统一组虚位移，计算各质点虚位移之间的关系，可用两种方法；① 几何法，即仿照运动学中速度分析的方法；② 解析法，即对约束方程进行变分，将各 $\delta \mathbf{r}_i$ 用广义虚位移 δq_j 表示。

(3) 计算主动力在虚位移上的虚功，则

几何法中可用

$$\delta W = \sum F_i \delta r_i \cos(\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i)$$

解析法中可用

$$\delta W = \sum (F_{ix} \cdot \delta x_i + F_{iy} \cdot \delta y_i + F_{iz} \cdot \delta z_i)$$

(4) 用虚位移原理写出 $\delta W = 0$ ，令独立虚位移前的系数为零，即得平衡方程。

例题 4-3

升降机构如例题图 4-3 所示。各支杆长度相等，均为 $2l$ ，铰接点 A, E, H 在杆的中间。机构的平衡位置为 θ ，试求力偶 M 与重物 W 间的关系。

分析： 本题属于具有理想约束的系统，可以利用虚位移原理求力偶 M 与重物 W 间的关系。

解：

建立如例题图 4-3 所示的坐标系。由于安放重物的平台做平动， W 的作用点的位移与点 J 相同。点 J 的坐标为

$$y_J = 6l \sin \theta$$

对上式求变分，得

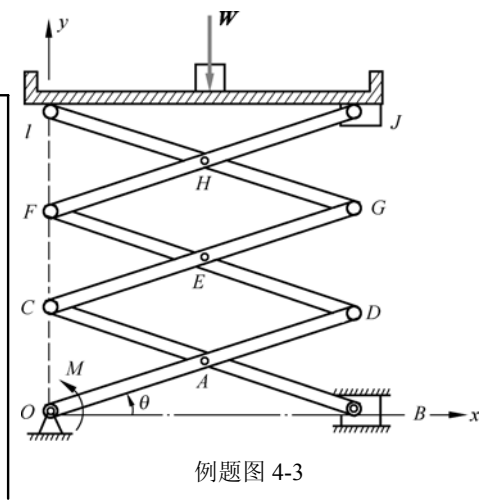
$$\delta y_J = 6l \cos \theta \delta \theta$$

根据虚位移原理，有

$$M \delta \theta - W \cdot 6l \cos \theta \delta \theta = 0$$

由 $\delta \theta$ 的独立性，得

$$M = 6Wl \cos \theta$$



例题图 4-3

讨论：

(1) 本题的机构具有多个重复单元，解析法比几何法优越。

(2) 用虚位移原理解题时，不涉及系统内部的约束力。但当用几何静力学列写平衡方程式时，往往需要将系统拆开，因而出现内部约束力。由本题可以明显地看出使用虚位移原理解题的特点及优越性。

例题 4-4

螺旋压榨机中螺杆的螺距为 h 。如果在手柄上作用一个水平面内的力偶 $2Fl$ ，求平衡时作用于被压榨物体上的压力。（忽略螺杆与螺母之间的摩擦）

分析：研究由手柄、螺杆及压板组成的平衡系统，忽略摩擦后，它是理想约束。标出主动力 (F, F' 及压板阻力 F_N)，并建立相应虚位移——手柄转角和压板行程之间的关系，利用虚位移原理求解。

解：

给系统以虚位移，即手柄转角 $\delta\varphi$ 和压板行程 δs ，二者的关系为

$$\delta s = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$$

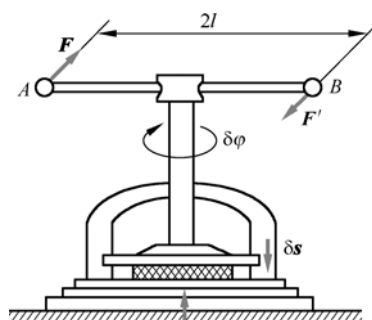
计算主动力的虚功，并由虚位移原理可得

$$\begin{aligned} \delta W &= 2Fl\delta\varphi - F_N\delta s \\ &= \left(2Fl - \frac{h}{2\pi} F_N \right) \delta\varphi = 0 \end{aligned}$$

由于 $\delta\varphi$ 是任意的，故有

$$2Fl - \frac{h}{2\pi} F_N = 0 \quad \text{或} \quad F_N = 4\pi \frac{l}{h} F$$

所求的压力与阻力 F_N 大小相等，方向相反。



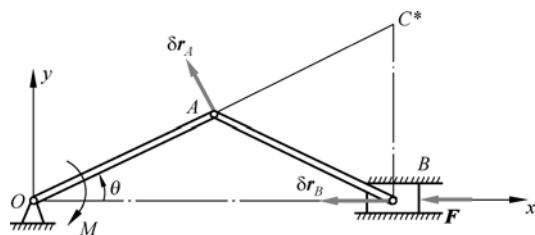
例题图 4-4

讨论：

解题过程中，利用约束力不做功避免了所有约束力的出现，这是虚位移原理解题与矢量静力学解题相比的最大优势。

例题 4-5

两个均质杆 $OA = AB = l$ ，均不计重量，构成曲柄滑块机构。在杆 OA 上作用力偶 M ，在滑块 B 上作用力 F ，使机构处于平衡状态，如例题图 4-5 所示。试求平衡位置的 θ 角。



例题图 4-5

分析：本题属于具有理想约束的系统，可以利用虚位移原理求平衡位置的 θ 角。下面用两种方法建立虚位移之间的关系。

解：

(1) 几何法

根据虚位移原理，有

$$-M\delta\theta + F\delta r_B = 0 \quad (\text{a})$$

为了寻求 $\delta\theta$ 与 δr_B 之间的关系，可找到杆 AB 的速度瞬心 C^* ，如例题图4-5所示，有

$$\frac{\delta r_A}{l} = \frac{\delta r_B}{2l\sin\theta}, \quad \frac{l\delta\theta}{l} = \frac{\delta r_B}{2l\sin\theta}, \quad \delta r_B = 2l\sin\theta\delta\theta$$

代入式(a)中，得

$$(-M + F \cdot 2l\sin\theta)\delta\theta = 0$$

因为系统有一个自由度，考虑 $\delta\theta$ 的独立性，所以有

$$\sin\theta = \frac{M}{2Fl}, \quad \theta = \arcsin \frac{M}{2Fl}$$

(2) 解析法

建立如例题图4-5所示的坐标 Oxy ，有

$$x_B = 2l\cos\theta, \quad \delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta$$

根据虚位移原理，有

$$-M\delta\theta + F_x\delta x_B = 0$$

于是，得

$$-M\delta\theta + F(-2l\sin\theta\delta\theta) = 0$$

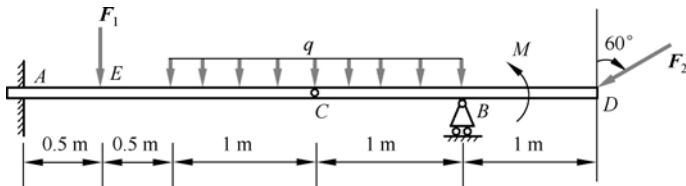
考虑到 $\delta\theta$ 的独立性，同样可得上述结果。

讨论：

在应用虚位移原理解题时，正确选用几何法还是解析法来确定虚位移之间的关系是很重要的。本题中，两种方法都可使用。这是因为本题易于寻求有关速度间的几何关系，故可用几何法。又因为系统的平衡位置是一般的角度 θ ，位置关系式可以变分，故也可用解析法。

例题 4-6

组合梁由水平梁 AC 、 CD 组成，如图4-6(a)所示。已知 $F_1 = 20 \text{ kN}$ ， $F_2 = 12 \text{ kN}$ ， $q = 4 \text{ kN/m}$ ， $M = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。不计梁自重，试求：固定端 A 和支座 B 处的约束力。



例题图 4-6(a)

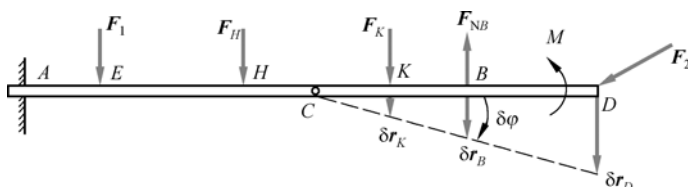
分析：本题中的组合梁为静定结构，其自由度为零，不可能发生虚位移。为了能应用虚位移原理确定 A, B 两处的约束力，可分别逐次解除一个约束，用约束力代替，从而使系统具有一个自由度。此时，将作用在解除约束处的约束力视为主动力，然后分析系统各主动力作用点的虚位移及相应的虚功，应用虚位移原理建立求解约束力的方程。

解：

为了方便计算，可事先算出梁 AC 和 CD 上各自分布载荷合力的大小及作用点。对于本例，有

$$F_H = F_K = q \times 1 = 4 \text{ kN}$$

各作用点如例题图 4-6(b)所示，且 $HC = CK = 0.5 \text{ m}$ 。



例题图 4-6(b)

(1) 计算支座 B 处的约束力。

解除支座 B ，代之以作用力 F_{NB} ，并将其视为主动力。

此时，梁 CD 绕点 C 转动，系统具有一个自由度。设梁 CD 的虚位移为 $\delta\varphi$ ，则各主动力作用点的虚位移如例题图 4-6(b)所示。

应用虚位移原理，有

$$\sum \delta W_F = 0,$$

$$F_K \delta r_K - F_{NB} \delta r_B - M \delta\varphi + F_2 \sin 30^\circ \delta r_D = 0 \quad (\text{a})$$

根据例题图 4-6(b)中的几何关系，有

$$\delta r_K = 0.5\delta\varphi, \quad \delta r_B = \delta\varphi, \quad \delta r_D = 2\delta\varphi$$

将上述各式代入虚位移原理表达式(a)中，得

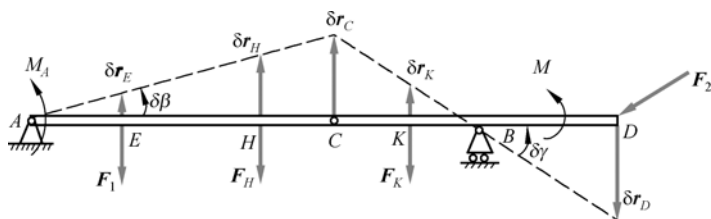
$$(0.5F_K - F_{NB} - M + F_2) \delta\varphi = 0 \quad (\text{b})$$

因为 $\delta\varphi \neq 0$ ，于是，由式(b)求得支座 B 的约束力为

$$F_{NB} = 0.5F_K + F_2 - M = 12 \text{ kN} \quad (\text{c})$$

(2) 求固定端 A 处的约束力偶。

解除 A 端的转动约束，使之成为可以转动的固定铰支座，并代之以约束力偶 M_A ，将 M_A 视为主动力偶 [如例题图 4-6(c)所示]。这时，梁 AC 和 CD 可分别绕点 A, B 转动，系统具有一个自由度。设梁 AC 有一个虚位移 $\delta\beta$ ，则梁 AC, CD 上各主动力作用点相应的虚位移如例题图 4-6(c)所示。



例题图 4-6(c)

根据虚位移原理, 得

$$\sum \delta W_F = 0,$$

$$M_A \delta\beta - F_1 \delta r_E - F_H \delta r_H - F_K \delta r_K + F_2 \delta r_D \cos 60^\circ - M \delta\gamma = 0 \quad (d)$$

根据例题图 4-6(c)中所示的几何关系, 各主动力作用点的虚位移分别为

$$\begin{aligned} \delta r_E &= 0.5\delta\beta, & \delta r_H &= 1.5\delta\beta, & \delta\gamma &= 2\delta\beta \\ \delta r_K &= 0.5\delta\gamma = \delta\beta, & \delta r_D &= \delta\gamma = 2\delta\beta \end{aligned}$$

代入式(d), 得

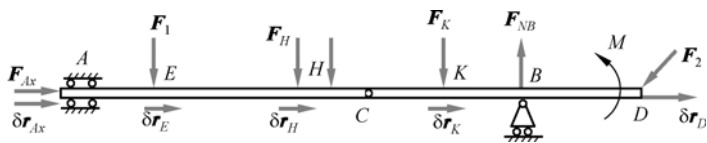
$$(M_A - 0.5F_1 - 1.5F_H - F_K + F_2 - 2M)\delta\beta = 0 \quad (e)$$

由于 $\delta\beta \neq 0$, 所以

$$M_A = 0.5F_1 + 1.5F_H + F_K - F_2 + 2M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{逆时针转向}) \quad (f)$$

(3) 求固定端 A 处的水平约束力。

解除 A 端的水平约束, 使之变为只能水平移动而不能铅垂移动和自由转动的新约束 [如例题图 4-6(d)所示], 视水平约束力 F_{Ax} 为主动力。这时系统具有一个自由度, 使梁 AC 和 CD 只能沿水平方向平动, 设点 A 有一个水平虚位移 δx_A , 则其他主动力作用点将产生如例题图 4-6(d)所示的虚位移。



例题图 4-6(d)

根据虚位移原理, 得

$$F_{Ax} \delta x_A - F_2 \delta r_D \sin 60^\circ = 0 \quad (g)$$

由于系统水平平动, 所以 $\delta x_A = \delta r_D$, 故上式为

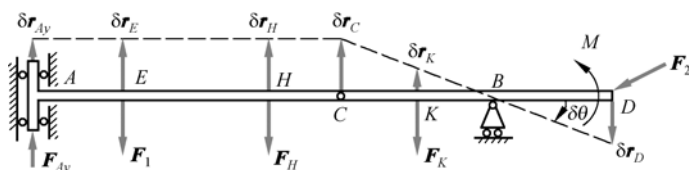
$$(F_{Ax} - F_2 \sin 60^\circ) \delta x_A = 0 \quad (h)$$

因为 $\delta x_A \neq 0$, 所以

$$F_{Ax} = F_2 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ kN} \quad (\text{i})$$

(4) 求固定端 A 处的铅垂约束力。

解除 A 端的铅直约束，使之变成只能铅垂移动而不能水平移动和自由转动的新约束 [如例题图 4-6(e)所示]，并视铅垂约束力 F_{Ay} 为主动力。这时，梁 AB 平动，梁 CD 绕点 B 转动，系统具有一个自由度。



例题图 4-6(e)

设点 A 有一个铅垂虚位移 δy_A ，其余各主动力作用点及梁 CD 的虚位移如例题图 4-6(e)所示。应用虚位移原理，有

$$F_{Ay} \delta y_A - F_1 \delta r_E - F_H \delta r_H - F_K \delta r_K + F_2 \sin 30^\circ \delta r_D - M \delta \theta = 0 \quad (\text{j})$$

由于梁 AC 铅垂平动，梁 CD 绕点 B 转动，于是，由例题图 4-6(e)得到

$$\begin{aligned} \delta r_E &= \delta r_H = \delta r_C = \delta y_A \\ \delta r_K &= 0.5 \delta y_A, \quad \delta \theta = \frac{\delta r_C}{CB} = \delta y_A \end{aligned}$$

将上述各式代入式(j)，得

$$(F_{Ay} - F_1 - F_H - 0.5 F_K + F_2 \sin 30^\circ - M) \delta y_A = 0 \quad (\text{k})$$

因为 $\delta y_A \neq 0$ ，故有

$$F_{Ay} = F_1 + F_H + 0.5 F_K - 0.5 F_2 + M = 22 \text{ kN}$$

讨论：

(1) 通过以上分析过程可以看出：当应用虚位移原理求结构物的内、外约束力时，由于系统无自由度，因而无法给出符合约束的虚位移。为此，需要解除约束（并代之以相应的约束力，然后将此约束力视为“主动力”），根据不同要求，将结构转化为机构求解。当求同一系统的多个约束力时，只需逐个将约束解除（每次解除一个约束），即可逐个将约束力全部求出，因而无须解联立方程。

(2) 每解除一个约束，必须画出其相应的虚位移状态。

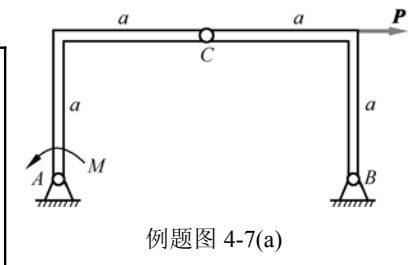
(3) 注意本例在求解过程中，将梁 AC 和 CD 上的匀布载荷分别合成，并作用在各自的作用点上，而不是将其作为一个整体合成一个作用在点 C 的合力 F_C 。可以证明 $F_K \delta r_K + F_H \delta r_H \neq F_C \delta r_C$ ，所以，一旦遇见组合结构上两个以上刚体作用有匀布载荷时，必须像本例这样做，否则，会导致结果错误。

(4) 本例也可通过解除中间铰 C 的约束，并应用虚位移原理来确定约束力。请读者自行尝试。

例题 4-7

在例题图 4-7(a)所示的三铰拱上作用有力 P 及力偶 M ，结构自重不计，试利用虚位移原理求铰 B 的约束力。

分析：本题与上一题类似，三铰拱为静定结构，其自由度为零，不可能发生虚位移。为了能应用虚位移原理确定铰 B 的约束力，需要逐个解除约束，代之以约束力，使系统具有一个自由度。将作用在解除约束处的约束力视为主动力，然后应用虚位移原理求解约束力。



例题图 4-7(a)

解：

(1) 求铰 B 的水平约束力。

解除铰 B 的水平约束，代之以水平力 F_{Bx} 。求系统在 M 、 P 及 F_{Bx} 作用下的平衡条件。给系统一个虚位移，并用几何法计算各虚位移的关系，得

$$|\delta \mathbf{r}_B| = 2a\delta\theta, \quad |\delta \mathbf{r}_D| = a\delta\theta$$

于是，根据虚位移原理，有

$$\delta W = -M\delta\theta + P \cdot \delta \mathbf{r}_D + F_{Bx} |\delta \mathbf{r}_B| = 0$$

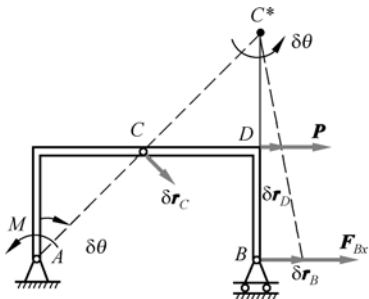
$$(-M + Pa + F_{Bx} \cdot 2a)\delta\theta = 0$$

所以

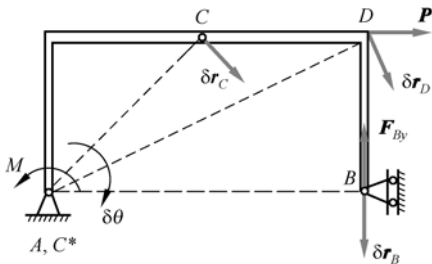
$$F_{Bx} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{a} - P \right)$$

(2) 求铰 B 的垂直约束力。

解除铰 B 的垂直约束，代之以垂直力 F_{By} 。注意，杆 BCD 的速度瞬心在点 A 。



例题图 4-7(b)



例题图 4-7(c)

用几何法计算各虚位移的关系，得

$$|\delta \mathbf{r}_C| = \sqrt{2}a\delta\theta, \quad |\delta \mathbf{r}_B| = 2a\delta\theta$$

根据虚位移原理，有

$$\delta W = -M\delta\theta + P \cdot \delta \mathbf{r}_D - F_{By} |\delta \mathbf{r}_B| = 0$$

$$(-M + Pa - F_{By} \cdot 2a)\delta\theta = 0$$

所以

$$F_{By} = \frac{1}{2} \left(P - \frac{M}{a} \right)$$

讨论:

用几何法计算各虚位移的关系时, 需要用到运动学中刚体平面运动的相关知识。

例题 4-8

例题图 4-8(a)所示的桁架上作用有水平力 F , 求桁架 1, 2 两杆的内力。

分析: 由于结构是无自由度的, 因而无法给出符合系统约束的虚位移。为此, 与前面的例题类似, 解除待求杆件的约束, 代之以相应的约束力, 然后利用虚位移原理求解。

解:

为了求杆 1 的内力, 将杆 1 解除, 并代之以相应的内力 F_1, F_1' , 如例题图 4-8(b)所示。这样, 结构 $A_1A_2A_3A$ 可绕 A 做定轴转动。由虚位移原理, 可得

$$F\delta r_F \cos 45^\circ - F_1\delta r_1 = 0$$

又因

$$\delta r_1 = \delta r_F \cos 45^\circ$$

所以, 得

$$F_1 = F \quad (\text{拉力})$$

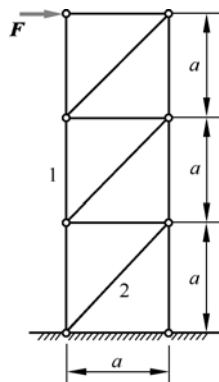
为了求杆 2 的内力, 同样将杆 2 解除, 并代之以相应的内力 F_2, F_2' , 如例题图 4-8(c)所示。这样, 原结构 $BB_1B_2B_3$ 变成了平行四连杆机构, 结构 $A_1A_2A_3AB_1B$ 做平动, 有

$$\delta r_B = \delta r_2 = \delta r_F$$

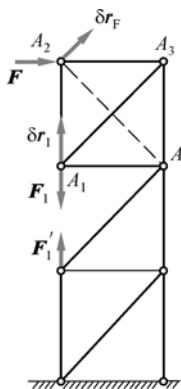
根据虚位移原理, 得

$$F\delta r_F - F_2 \cos 45^\circ \delta r_2 = 0$$

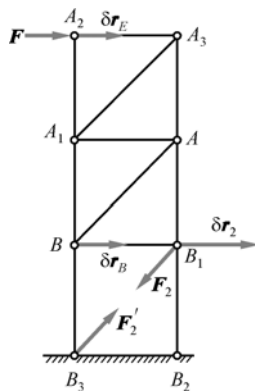
$$F_2 = \sqrt{2}F \quad (\text{拉力})$$



例题图 4-8(a)



例题图 4-8(b)



例题图 4-8(c)

例题 4-9

在例题图4-9(a)所示的机构中, 弹簧的刚度系数为 k , 当 AC 距离等于 d 时, 弹簧内拉力为零。若在点 C 作用一个水平力 F , 杆系处于平衡, 求 AC 的距离。设 $AB = a$, $BD = b$, 杆重不计。

分析: 为了计算弹簧力的虚功 (弹簧力与弹簧两端相对虚位移的乘积), 需要把弹簧去掉, 用弹簧作用在杆上的力代替。

解:

当 $AC = d$ 时, 弹簧为原长, 设为 l_0 , 则有

$$\frac{d}{l_0} = \frac{a}{b}, \quad l_0 = \frac{b}{a}d$$

设当 $AC = x$ 时, 弹簧长度为 l , 则有

$$\frac{x}{l} = \frac{a}{b}, \quad l = \frac{b}{a}x$$

故弹簧力为

$$F_D = F_E = k \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}d \right) = \frac{kb}{a}(x - d) \quad (a)$$

去掉弹簧, 用作用在 AB 与 BC 上的两个力来代替。根据虚位移原理, 有

$$F\delta x_C + F_D\delta x_D - F_E\delta x_E = F\delta x_C - F_D\delta(x_E - x_D) = 0 \quad (b)$$

又通过几何分析, 有

$$x_C = 2a\cos\varphi, \quad \delta x_C = -2a\sin\varphi\delta\varphi \quad (c)$$

$$x_D = (a-b)\cos\varphi, \quad x_E = (a+b)\cos\varphi$$

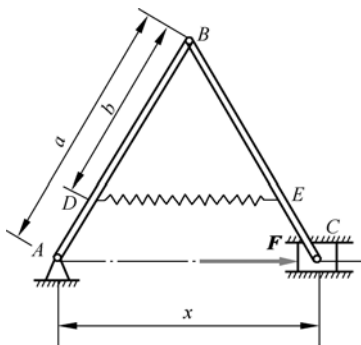
$$x_E - x_D = 2b\cos\varphi \quad \delta(x_E - x_D) = -2b\sin\varphi\delta\varphi \quad (d)$$

将式(a)、(c)、(d)代入式(b)中, 得

$$F(-2a\sin\varphi)\delta\varphi - \frac{kb}{a}(x-d)(-2b\sin\varphi)\delta\varphi = 0$$

由 $\delta\varphi$ 的独立性, 得

$$x = AC = d + \frac{F}{k} \left(\frac{b}{a} \right)^2$$



例题图 4-9(a)

4.3 广义力和平衡条件

前面介绍的虚位移原理可以推广到广义虚位移，从而引入广义力的概念。借助广义力可以表示平衡条件，为平衡分析提供了另外一种途径。

广义力

设质点系的广义坐标为 q_j ，自由度数为 k ，则

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) \\ \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta W &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}Q_j &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)\end{aligned}\quad (4-8)$$

称为广义力 (generalized force)。根据虚位移原理，主动力在质点系虚位移上的元功之和等于广义力在广义虚位移上的元功之和。

由于 δq_j 相互独立，可令某一个 δq_j 不为零，其他广义虚位移均为零，计算主动力元功之和 δW_j ，则有

$$\delta W_j = Q_j \delta q_j$$

因而

$$Q_j = \frac{\delta W_j}{\delta q_j}\quad (4-9)$$

以广义力表示的平衡条件

由虚位移原理给出

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

因为 δq_j 相互独立，故有

$$Q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k)\quad (4-10)$$

此即为在广义坐标下以广义力表示的平衡条件。

例题 4-10

光滑铰接如图 4-10(a)所示, 杆 OA 长 a , OB 长 b , 在 A, B 处作用有铅垂力 F_A, F_B 及水平力 F , 求平衡时的角度 φ_1 与 φ_2 。(杆重不计。)

分析: 本题有两个自由度, 选 φ_1 与 φ_2 为广义坐标, 求相应的广义力 Q_1 与 Q_2 , 然后根据由广义力表示的平衡条件求得解答。

解:

(1) 令 $\delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_2 = 0$, 如例题图 4-10(b)所示, 用几何法计算虚功, 得

$$\begin{aligned}\delta W_1 &= -F_A a \delta\varphi_1 \sin \varphi_1 - F_B a \delta\varphi_1 \sin \varphi_1 + F a \delta\varphi_1 \cos \varphi_1 \\ &= [-(F_A + F_B)a \sin \varphi_1 + Fa \cos \varphi_1] \delta\varphi_1\end{aligned}$$

于是, 有

$$Q_1 = \frac{\delta W_1}{\delta\varphi_1} = -(F_A + F_B)a \sin \varphi_1 + Fa \cos \varphi_1$$

(2) 令 $\delta\varphi_1 = 0, \delta\varphi_2 \neq 0$, 则虚功为

$$\delta W_2 = -F_B b \delta\varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + F b \delta\varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 = (-F_B \sin \varphi_2 + F \cos \varphi_2) b \delta\varphi_2$$

于是, 得

$$Q_2 = (-F_B \sin \varphi_2 + F \cos \varphi_2) b$$

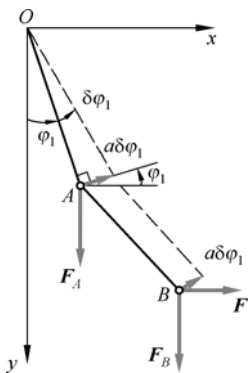
根据虚位移原理, 平衡时 $Q_1 = Q_2 = 0$, 因而有

$$(F_A + F_B) \sin \varphi_1 - F \cos \varphi_1 = 0$$

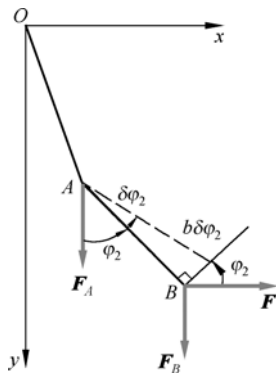
$$F_B \sin \varphi_2 - F \cos \varphi_2 = 0$$

解得

$$\tan \varphi_1 = \frac{F}{F_A + F_B}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{F}{F_B}$$



例题图 4-10(b)



例题图 4-10(c)

讨论:

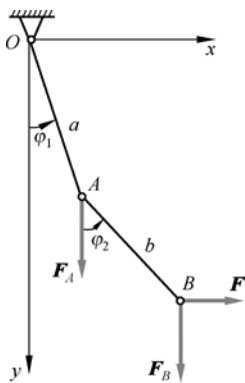
本题也可用解析法求解。将各量均用广义坐标 φ_1, φ_2 表示如下:

$$x_A \text{ (无必要写出),}$$

$$y_A = a \cos \varphi_1$$

$$x_B = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2,$$

$$y_B = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2$$



例题图 4-10(a)

δx_A (无必要写出),

$$\delta y_A = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1$$

$$\delta x_B = a \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + b \cos \varphi_2 \delta \varphi_2,$$

$$\delta y_B = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \delta \varphi_2$$

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = F_A, \quad F_{Bx} = F, \quad F_{By} = F_B$$

于是, 有

$$\delta W = F_{Ax} \delta x_A + F_{Ay} \delta y_A + F_{Bx} \delta x_B + F_{By} \delta y_B = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2$$

比较上式两边 $\delta \varphi_1$ 和 $\delta \varphi_2$ 的系数, 得到的 Q_1 和 Q_2 与前面的相同。

主动力为有势力时的平衡条件——最小势能原理

设主动力有势, 势能函数为 $V = V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, 则

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

$$\delta W = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = -\sum_i^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta V$$

由虚位移原理, 可得具有理想约束质点系平衡的充要条件为

$$\delta V = 0 \quad (4-11)$$

即势能的一阶变分为零, 或势能具有驻值。

研究表明, 当势能具有孤立极小值时, 平衡才是稳定的; 否则, 系统的平衡位形不稳定, 即在微小干扰下, 系统的平衡破坏, 且远离平衡位置。这个结论常称为最小势能原理(the principle of minimum potential energy)。

当用广义坐标表示时, 势能 $V = V(q_1, q_2, \dots, q_k)$, 广义力为

$$Q_j = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

所以, 广义坐标中的平衡条件可以写为

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (4-12)$$

当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} > 0$ 时, 为稳定平衡; 当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} < 0$ 时, 为不稳定平衡; 当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} = 0$ 时, 为随遇平衡。

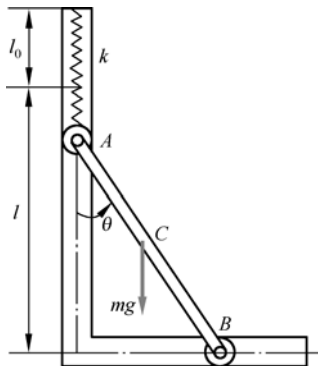
例题 4-11

在如例题图 4-11 所示机构中, 均质杆 AB 长 $l = 0.6\text{m}$, 质量 $m = 10\text{kg}$, 弹簧刚度 $k = 200\text{N/m}$ 。当 $\theta = 0^\circ$ 时, 弹簧为原长 l_0 。求杆的平衡位置。

分析: 系统具有理想约束, 一个自由度, 主动力为有势力。选取广义坐标 θ , 如例题图 4-11 所示。写出势能函数, 然后根据式(4-12)求杆的平衡位置。

解:

将弹簧势能基准点选在弹簧原长处, 重力势能基准点选在 B 所在的轨道, 则质点系在任意位置的势能为



例题图 4-11

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

驻值发生在

$$\frac{dV}{d\theta} = \left[kl^2(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}mgl \right] \sin\theta = 0$$

上式有两个解, 由

$$\sin\theta = 0$$

得

$$\theta_1 = 0$$

由

$$kl^2(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}mgl = 0$$

得

$$\theta_2 = \arccos\left(1 - \frac{mg}{2kl}\right) = 53.8^\circ$$

为了判断解的稳定性, 需要考查二阶导数, 即

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl(\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) - \frac{1}{2}mg\cos\theta$$

$$\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta_1} = -29.4 < 0, \quad \left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta_2} = 46.9 > 0$$

由此可知, 当 $\theta = \theta_2$ 时, 势能极小, 因而平衡位置是稳定的。

例题 4-12

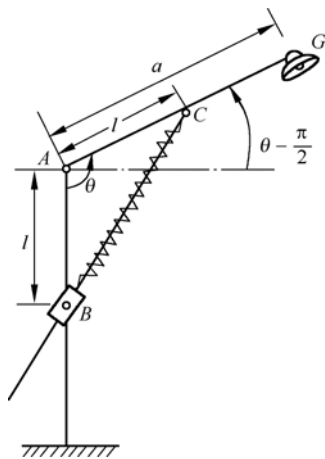
用例题图 4-12 所示的机构来支承路灯。已知灯的质量为 m , 质心在点 G 。A, C 为铰链, B 为套筒。不计支承杆的质量。当 $\theta = 180^\circ$ 时, 弹簧为原长。为使系统在 $\theta = 120^\circ$ 时处于平衡, 求弹簧刚度 k 应具有的大小, 并讨论该平衡位置的稳定性。

分析: 质点系具有理想约束, 一个自由度, 主动力为有势力。选取广义坐标 θ , 如例题图 4-12 所示。然后根据式(4-12)求杆的平衡位置。

解:

由例题图 4-12 可知弹簧原长 $l_0 = 2l$, 而当 $\theta \neq 180^\circ$ 时的长度为 $2l\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2l\sin\frac{\theta}{2}$, 所以弹簧的压缩量为 $2l\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$ 。取过点 A 的水平面为重力的零势能面, 则系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= mga\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}k \cdot 4l^2\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ &= -mga\cos\theta + 2kl^2\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



例题图 4-12

其一阶导数为

$$\frac{dV}{d\theta} = mga \sin \theta - 2kl^2 \cos \frac{\theta}{2} + kl^2 \sin \theta$$

当系统平衡时, 有

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=120^\circ} = mha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2kl^2 \cdot \frac{1}{2} + kl^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

于是, 得

$$k = \frac{mga}{l^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 6.464 \frac{mga}{l^2}$$

为了判断解的稳定性, 需要考查二阶导数, 即

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = (mga + kl^2) \cos \theta + kl^2 \sin \frac{\theta}{2}$$

当 $\theta = 120^\circ$ 时, 有

$$\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=120^\circ} = (mga + kl^2) \left(-\frac{1}{2} \right) + kl^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.866mga > 0$$

所以, 系统在 $\theta = 120^\circ$ 时处于稳定平衡位置。

讨论:

尽管矢量静力学与分析静力学都能解出不完全约束系统的平衡位置, 但前者无法判断该平衡位置的稳定性, 因为前者“就静论静”。而分析静力学是通过系统无限小的虚运动(虚位移), 将平衡位置与其邻近的可能位置相比较而挑选出来的, 故可以进一步研究平衡位置的稳定性, 是“就动论静”。分析静力学在此点上显示了它的普遍性。

本章小结

(1) 分析力学主要研究非自由质系的运动, 它的特点是通过功、能等标量用数学分析的方法进行研究。分析力学的基本概念有约束及约束方程、广义坐标、自由度、虚位移、广义力、理想约束等。

(2) 虚位移的定义: 在给定瞬时, 质点或质点系被约束所容许的任何微小位移, 称为该质点或质点系的虚位移, 以 $\delta \mathbf{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 表示。虚位移只是对约束特性的进一步描述, 与实际上作用的主动动力无关。在稳定约束情况下, 实位移是虚位移的一种。

(3) 虚位移原理: 对具有理想约束的质点系, 其平衡的充要条件是: 作用于质系的主动动力在任意一个虚位移上所做虚功之和等于零。

$$\delta W = 0 \quad \text{或} \quad \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

或

$$\sum (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0$$

对于有运动自由度的质点系, 应用虚位移原理可以直接求得主动力平衡条件; 对于受完全约束的质点系, 应首先解除约束, 赋予运动自由度, 并将相应的约束反力看成主动力, 才能应用虚位移原理。

(4) 当质点系的位置用广义坐标表示时, 虚位移原理的形式为

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

其中, $Q_j = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ 定义为广义力。

通常求广义力的方法是通过计算虚功, 即只给一个广义虚位移 δq_j , 其他广义虚位移为零, 计算主动力虚功之和 δW_j , 则有

$$Q_j = \frac{\delta W_j}{\delta q_j}$$

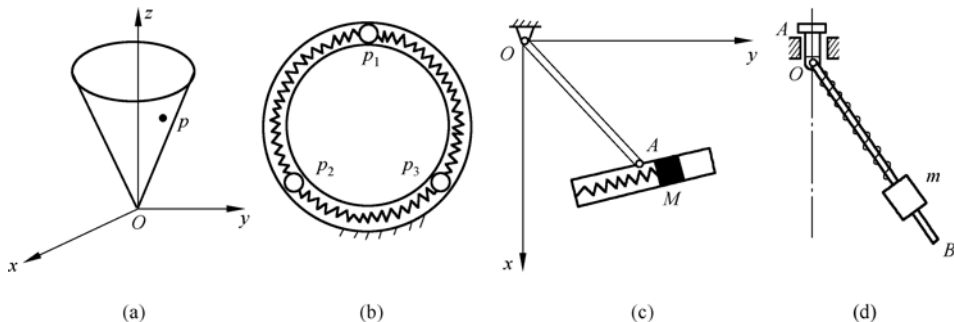
(5) 当质点系所受主动力有势时, 虚位移原理的形式为

$$\delta V = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

其中, V 为系统的势能。当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} > 0$ 时, 为稳定平衡; 当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} < 0$ 时, 为不稳定平衡; 当 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} = 0$ 时, 为随遇平衡。

思考题

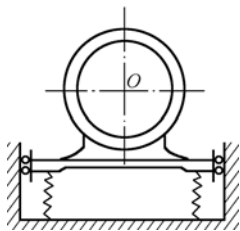
4-1 判断思考题图 4-1 所示各系统的自由度, 并选择描述运动的广义坐标。



思考题图 4-1

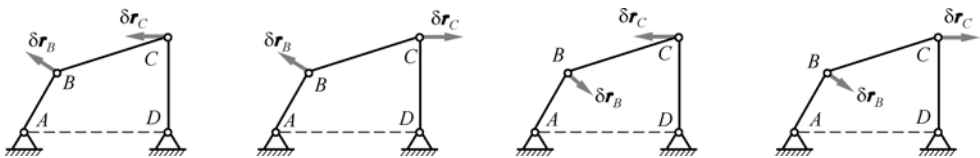
- (1) 质点 p 在固定圆锥面上的运动, 如思考题图 4-1(a)所示;
- (2) 用弹簧相连接三个质点在固定的圆环内运动, 如思考题图 4-1(b)所示;
- (3) 杆 OA 绕固定轴转动, A 端铰接的圆筒内有弹簧-质量振子在运动, 如思考题图 4-1(c)所示;
- (4) 短轴 OA 绕铅垂轴转动, 轴上点 O 用柱铰连接杆 OB , 杆上有用弹簧连接的滑块在滑动, 如思考题图 4-1(d)所示。

- 4-2 如思考题图 4-2 所示的置于弹性基础上的电动机, 在(1) 转子等角速度旋转, (2) 只知转子上的作用力矩情况下, 系统各为多少自由度? 属于什么约束性质?



思考题图 4-2

4-3 四连杆机构的虚位移有以下图示四种画法，其中正确的有哪些？

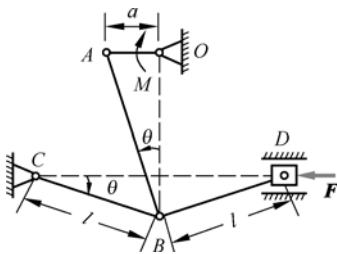


思考题图 4-3

习 题

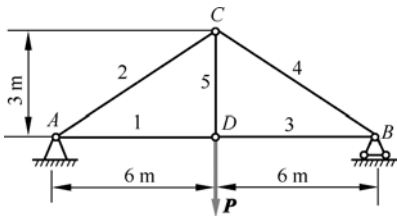
基本题

4-1 在习题图 4-1 所示机构中，曲柄 OA 上作用有力偶矩为 M 的力偶，在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图所示。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。



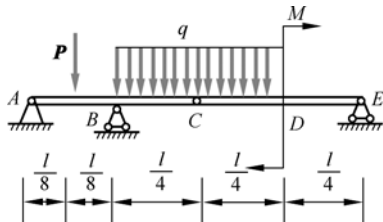
习题图 4-1

4-2 习题图 4-2 所示桁架中，已知 $AD = DB = 6\text{ m}$ ， $CD = 3\text{ m}$ ，节点 D 处载荷为 P 。试用虚位移原理求杆 3 的内力。



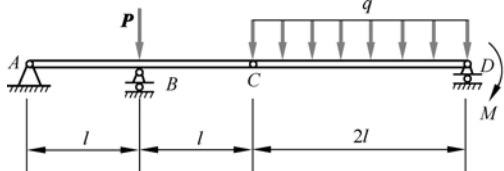
习题图 4-2

4-3 组合梁由铰链 C 铰接 AC 和 CE 而成，载荷分布如习题图 4-3 所示。已知跨度 $l = 8\text{ m}$ ， $P = 4900\text{ N}$ ，均布力 $q = 2450\text{ N/m}$ ，力偶矩 $M = 4900\text{ N}\cdot\text{m}$ ，求支座反力。



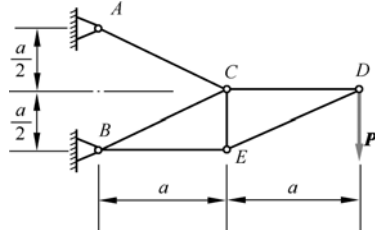
习题图 4-3

4-4 试用虚位移原理求习题图 4-4 所示连续梁的支座反力（图中载荷、尺寸为已知）。



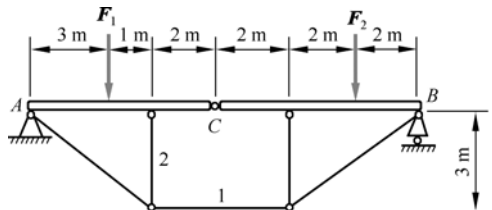
习题图 4-4

4-5 求习题图 4-5 所示平面桁架中杆 AC 及杆 BC 的内力。



习题图 4-5

4-6 试求习题图 4-6 所示梁-桁架组合结构中 1、2 两杆的内力。已知 $F_1 = 4\text{ kN}$ ， $F_2 = 5\text{ kN}$ 。



习题图 4-6

第 5 章

质点系动力学普遍定理

5.1 质点动力学基本方程

质点的动力学是物理学中最早得到研究的力学问题之一，其理论基础由牛顿在总结前人研究成果的基础上提出，即我们现在所熟知的牛顿三大定律。由此可获得质点动力学方程，并在此基础上建立了整个经典力学的理论体系。

牛顿三大定律

1. 牛顿第一定律——惯性定律

任何质点如不受力作用，则将保持原来静止或等速直线运动状态。物体保持其运动状况不变的固有属性，称为惯性（inertia）。质量为物体惯性的度量。

2. 牛顿第二定律——运动定律

该定理指出，物体“运动量的改变”与所施加的力成正比，并发生在力的作用线方向上。其中，“运动量”即指质点的动量（momentum），定义为“ $m\mathbf{v}$ ”，其数学表达式为

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (5-1)$$

上式也称为质点的动量定理（theorem of momentum）。在经典力学的范畴，质点的质量是恒定的，于是式(5-1)可写为

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5-2)$$

即力作用下物体所获得的加速度大小与作用力的大小成正比，与物体的质量成反比，方向与力的方向相同。

3. 第三定律——作用反作用定律

两个物体之间的作用力和反作用力大小相等，方向相反，并沿同一条直线分别作用在两个物体上。这就是静力学公理四。

质点基本运动方程

当质点受多个力作用时，牛顿第二定律表达式(5-2)的右端应为这几个力的合力，即

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_i \quad \text{或} \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_i \quad (5-3)$$

上式即为矢量形式的质点运动微分方程。实际计算时，常用投影形式。其直角坐标形式为

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz} \quad (5-4)$$

自然坐标形式为

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_n, \quad 0 = \sum F_b \quad (5-5)$$

牛顿定律建立于惯性参考系上，适用于物体运动速度远小于光速的情况。由牛顿定律可以进一步推出其他重要的动力学定理。

质点的动能定理

将牛顿第二定律表达式(5-2)式两边点乘 $d\mathbf{r}$ ，得

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

因为 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ ，于是上式可写为

$$m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

或

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \delta W \quad (5-6)$$

式中， $T = \frac{1}{2}mv^2$ 称为质点的**动能**（kinetic energy）， $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 称为力的元功。式(5-6)称为**质点动能定理**（theorem of kinetic energy）的微分形式，即作用于质点上力的元功等于质点动能的微分。将式(5-6)积分，得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5-7)$$

上式右端为作用于质点上的力在有限路程上的功。式(5-7)为质点动能定理的积分形式，即作用于质点上的力在有限路程上的功等于质点动能的改变量。

将合力的元功分为保守力的元功 $\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}$ 和非保守力的元功 $\mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}$ ，则

$$dT = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}$$

设 V 为保守力 \mathbf{F}_c 对应的势能，则有 $\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = -dV$ ，于是

$$d(T + V) = \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}$$

定义**机械能**（mechanical energy） $E = T + V$ ，于是有

$$dE = \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} \quad (5-8)$$

上式称为质点的机械能定理。若在某一过程中，质点所受的非保守力不做功，即 $\mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r} \equiv 0$ ，则在该过程中质点的机械能守恒，即

$$E = T + V = \text{常量} \quad (5-9)$$

5.2 质点系的动量定理

上述关于质点的动力学定理和基本方程已在物理学中得到充分的研究，作为独立学科的力学更关注质点系的动力学问题。本章的大部分内容将致力于介绍质点系（特别是刚体）的动力学普遍定理和基本运动方程及其应用。

5.2.1 动量定理

动量

在牛顿第二定律表达式(5-1)中已经涉及质点的动量，即质点的质量 m 与其速度 \mathbf{v} 的乘积（ $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ）。动量是与物体的质量和速度相关的物理量，表示这个物体在其运动方向上保持运动的趋势。动量也是矢量，它的方向与速度的方向相同，单位为 $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ 。

在质点系中，各质点动量的矢量和称为质点系的动量，即

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i \quad (5-10)$$

与重心类似，质点系的质量中心〔简称**质心**（center of mass）〕的矢径为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \quad (5-11)$$

由于 m_i 不变，所以

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (m\mathbf{r}_C) = m\mathbf{v}_C \quad (5-12)$$

即质点系的动量等于质心速度 \mathbf{v}_C 与其全部质量 m 的乘积。该结论对于刚体这种特殊的质点系当然也是成立的。如图 5-1(a)所示的长为 l 、质量为 m 的均质细杆，在平面内以角速度 ω 转动，则其动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = \frac{1}{2}ml\omega$ ，方向同质心速度方向；若杆绕质心 C 转动，如图 5-1(b)所示，则其动量为零，因为其质心速度为零。对于由多个刚体组成的刚体系，其总的动量可以通过先按式(5-12)计算每个刚体的动量，然后再相加得到。

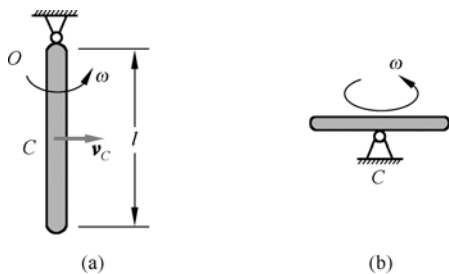


图 5-1 刚体的动量计算

冲量

物体在力作用下发生的运动变化不仅与力的大小有关，还与力作用的时间有关。如经验告

诉我们，人力拖动货物可经过一段时间使货物达到一定的速度，但若换成汽车拖动，则经过很短的时间就能达到同样的速度。所以，用力与其作用时间的乘积，即

$$I = Ft \quad (5-13)$$

来衡量力在这段时间内的积累效应更合理。该物理量称为冲量 (impulse)，是改变质点机械运动状态的原因。冲量是矢量，单位为 N·s。

若力 \mathbf{F} 是随时间变化的，则定义其在微小时间段 dt 内的冲量为元冲量，即

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}dt \quad (5-14)$$

于是，力 $\mathbf{F}(t)$ 在 $t_1 \sim t_2$ 内的冲量为矢量积分，即

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt \quad (5-15)$$

动量定理

前面已经指出，牛顿第二定律表达式(5-1)即是质点的动量定理，可写成如下微分形式：

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt = d\mathbf{I} \quad (5-16)$$

即质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量。上式积分后可得

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \mathbf{I} \quad (5-17)$$

即在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点的力在此段时间内的冲量。式(5-17)称为质点动量定理的积分形式。

图 5-2 所示的是由 n 个质点组成的质点系，第 i 个质点的质量为 m_i ，速度为 \mathbf{v}_i ，作用于质点上的外力记为 $\mathbf{F}_i^{(e)}$ ，内力记为 $\mathbf{F}_i^{(i)}$ 。对于每个质点，根据牛顿第二定律，得

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

式中， $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$ 为质点的动量。对于整个系统，求上述 n 个方程的矢量和，并交换求和与求导次序，得

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(i)}$$

式中， $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_R^{(e)}$ 为外力的主矢量， $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(i)}$ 为内力的主矢量。根据牛顿第三定律，内力总是

大小相等，方向相反，成对地出现在质点系内部，所以 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(i)} = 0$ ，于是得

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (5-18)$$

即质点系动量 \mathbf{p} 对时间 t 的变化率等于作用在质点系上外力系的主矢量，而与内力系无关。式(5-18)称为质点系动量定理，也可写成与式(5-16)和式(5-17)相类似的微分形式和积分形式。

在应用动量定理时，常取投影形式，如直角坐标投影式为

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum F_x^{(e)}, \quad \frac{dp_y}{dt} = \sum F_y^{(e)}, \quad \frac{dp_z}{dt} = \sum F_z^{(e)} \quad (5-19)$$

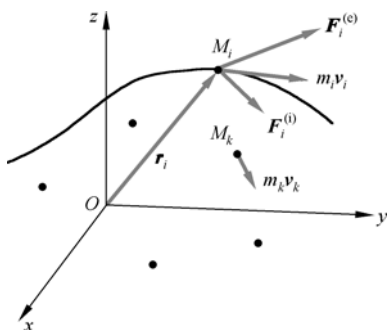


图 5-2 质点系的动量定理

动量守恒

质点系动量的变化只决定于外力的主矢量。内力不能改变系统的总动量，只能使系统中各质点间彼此进行动量交换。如果外力系的主矢量为零，即 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_R^{(e)} = 0$ ，则 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ ，此时有

$$\mathbf{p} = \text{常矢量} \quad (5-20)$$

上式称为质点系动量守恒。如果外力系的主矢量在某一坐标轴上的投影为零，则质点系动量在此轴上守恒。例如，若 $\sum_{i=1}^n F_x^{(e)} = 0$ ，则 $p_x = \text{常数}$ 。

应用动量定理有可能使比较复杂的质点系动力学问题变得简单。这是因为，应用动量可以避免考虑内力；而且如果外力主矢量等于零或在某一固定轴的投影等于零，就可以立刻写出动量守恒的积分。

5.2.2 质心运动定理

质点系的运动不仅与受力有关，而且与其质量的分布有关。质心的位置能够反映质量分布的某种特征。质心的位置由式(5-11)计算得到。由于质点系的动量等于质点系的质量与质心速度的乘积 [见式(5-12)]，所以质点系动量定理的表达式(5-18)可写为

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (5-21)$$

当质点系质量恒定时，为

$$m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad \text{或} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (5-22)$$

即质点系的质量与质心加速度的乘积等于作用于质点系的外力系的主矢量，称为**质心运动定理**。直角坐标系中的投影式为

$$ma_{Cx} = \sum F_x^{(e)}, \quad ma_{Cy} = \sum F_y^{(e)}, \quad ma_{Cz} = \sum F_z^{(e)} \quad (5-23)$$

自然坐标系中的投影式为

$$ma_n = m \frac{v_C^2}{\rho} = \sum F_n^{(e)}, \quad ma_\tau = m \frac{dv_C}{dt} = \sum F_\tau^{(e)}, \quad 0 = \sum F_b^{(e)} \quad (5-24)$$

由质心运动定理可得出以下结论:

(1) 质点系质心的运动, 可以视为一个质点的运动, 如果将质点系的质量集中在质心上, 同时将作用在质点系上的所有外力都平移到质心上, 则质心运动的加速度与所受外力的关系符合牛顿第二定律。例如, 爆破山石时, 碎块四处飞落, 但在落地前所有碎块的质心在重力作用下做抛体运动, 据此可预先估计碎石堆落的地方, 如图 5-3 所示。

(2) 质点系的内力不影响质心的运动, 只有外力才能改变质心的运动。

(3) 如果作用于质点系的外力系主矢量为零, 则质心保持不变(初始静止时)或做匀速直线运动(初始运动时); 若外力系主矢量在某一坐标轴上的投影为零, 则质心速度在该轴的投影保持不变。该结论称为**质心运动守恒定律**。

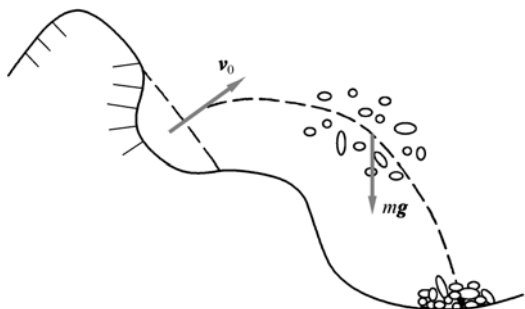


图 5-3 飞落的碎石质心做抛体运动

例题 5-1

如例题图 5-1 所示, 水流流经一个水平直角弯管而改变方向。已知直管部分的横截面面积分别为 A_1 和 A_2 。设流体不可压缩, 密度为 ρ , 流动稳定, 流速为 v_1 。试求管壁对水流的附加动约束力。

分析: 在水静止时, 管道壁对水的约束力就等于水的压力。但是在流动时, 由于有动量的改变, 所以会产生附加的约束力。

解:

取控制截面 $aa-bb$ 之间的不可压缩流体为研究对象, 根据连续性条件有

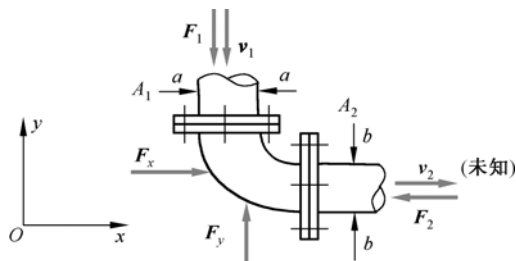
$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 \quad (a)$$

控制截面内的水流在水平面内所受的力包括管壁对流体的作用力 F_x 和 F_y , 两个截面 aa 和 bb 上受到的相邻流体的压力 F_1 和 F_2 , 方向如例题图 5-1 所示。考虑式(a), 在 dt 时间间隔内动量的改变为

$$dp = (\rho A_2 v_2 dt) v_2 - (\rho A_1 v_1 dt) v_1 = \rho A_1 v_1 dt (v_2 - v_1)$$

根据质点系的动量定理, 有

$$\frac{dp}{dt} = F_x + F_y + F_1 + F_2$$



例题图 5-1

由以上两式, 可得

$$\rho A_1 v_1 (v_2 - v_1) = F_x + F_y + F_1 + F_2$$

将上式分别向轴 x, y 投影, 得管壁对水流的约束力 F_x 和 F_y 分别为

$$F_x = \rho A_1 v_1 v_2 + F_2 = \rho A_2 v_2^2 + F_2, \quad F_y = \rho A_1 v_1 v_1 + F_1 = \rho A_1 v_1^2 + F_1$$

扣除压力, 管壁对水流的附加动约束力为

$$F_{xd} = \rho A_1 v_1 v_2 = \rho A_2 v_2^2, \quad F_{yd} = \rho A_1 v_1^2$$

讨论:

(1) 由以上结果可知, 只要知道流速和曲管尺寸, 就可求得附加约束力, 其值与质量流率(单位时间内流经任意一个截面的质量)成正比。当流速很高或管子的横截面很大时, 动约束力很大, 因此为安全起见, 应该在管子的弯头处安装支座。

(2) 以上思路可以用于分析任意形状的弯管, 也适用于竖直弯管, 但此时需要考虑流体的重力。

例题 5-2

例题图 5-2 所示的是曲柄滑块机构, 曲柄以匀角速度 ω 转动, 滑块 B 沿 x 轴滑动, OA 和 AB 为均质杆, 质量均为 m_1 , 且 $OA = AB = l$, 滑块质量为 m_2 。不计各处摩擦, 求支座 O 处的水平约束力。

分析: 本题的刚体系统由做定轴转动的杆 OA 、做平面运动的杆 AB 和做平动的物体 B 组成, 可以根据质心运动定理建立外力与刚体系运动量之间的关系, 从而得到支座 O 处的水平约束力。

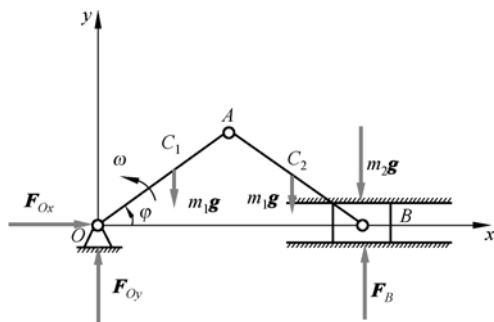
解:

(1) 受力分析。如例题图 5-2 所示, 系统所受外力有: 杆 OA 和杆 AB 的重量 $m_1 g$, 滑块 B 的重量 $m_2 g$, 约束力 F_{Ox} , F_{Oy} 和 F_B 。

(2) 运动分析。图中 C_1 和 C_2 分别为杆 OA 和杆 AB 的质心, 有

$$\begin{aligned} x_{C1} &= \frac{l}{2} \cos \varphi & \dot{x}_{C1} &= -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi & \ddot{x}_{C1} &= -\frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ y_{C1} &= \frac{l}{2} \sin \varphi & \dot{y}_{C1} &= \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi & \ddot{y}_{C1} &= -\frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi \\ x_{C2} &= \frac{3}{2} l \cos \varphi & \dot{x}_{C2} &= -\frac{3}{2} l \dot{\varphi} \sin \varphi & \ddot{x}_{C2} &= -\frac{3}{2} l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \frac{3}{2} l \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ y_{C2} &= \frac{l}{2} \sin \varphi & \dot{y}_{C2} &= \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi & \ddot{y}_{C2} &= -\frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} l \ddot{\varphi} \cos \varphi \\ x_B &= 2l \cos \varphi & \dot{x}_B &= -2l \dot{\varphi} \sin \varphi & \ddot{x}_B &= -2l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - 2l \ddot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

(3) 建立系统的运动与受力之间的关系。应用刚体系质心运动定理, 得



例题图 5-2

$$\sum m_i \mathbf{a}_{Ci} = \mathbf{F}_R^{(e)}$$

在 Oxy 坐标轴上的投影式为

$$\begin{cases} \sum m_i \ddot{x}_{Ci} = \sum F_x^{(e)} \\ \sum m_i \ddot{y}_{Ci} = \sum F_y^{(e)} \end{cases}$$

将第(1)、(2)步骤中得到的结果代入上式，并注意到 $\varphi = \omega t$ ， $\dot{\varphi} = \omega$ ， $\ddot{\varphi} = 0$ ，得

$$\begin{cases} -m_1 \frac{l}{2} \omega^2 \cos \varphi - m_1 \frac{3}{2} l \omega^2 \cos \varphi - 2m_2 l \omega^2 \cos \varphi = F_{Ox} \\ -m_1 \frac{l}{2} \omega^2 \sin \varphi - m_1 \frac{1}{2} l \omega^2 \sin \varphi = F_{Oy} + F_B - (2m_1 + m_2)g \end{cases}$$

(4) 由上式求出未知约束力，得

$$\begin{cases} F_{Ox} = -2(m_1 + m_2)l\omega^2 \cos \omega t \\ F_{Oy} + F_B = (2m_1 + m_2)g - m_1 l \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

讨论：

(1) 如果已知质心的运动规律，可以通过质心运动定理求解未知力；反之，在外力已知的情况下，也可以通过质心运动定理求得质心的运动规律。

(2) 求解上述两类问题，都必须首先确定质点系所受的全部外力，包括主动力和约束力。

(3) 以上只求得铅直方向约束力 F_{Oy} 和 F_B 的合力，并不能得到它们各自的值。学习了下面的动量矩定理，才能进一步求解所有约束力。

5.3 质点系的动量矩定理

5.3.1 动量矩定理

动量矩

如图 5-4 所示，瞬时位置矢径为 \mathbf{r} 的质点 M ，其动量 $m\mathbf{v}$ 对于点 O 的矩，定义为质点对点 O 的动量矩 (angular momentum)，即

$$\mathbf{M}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (5-25)$$

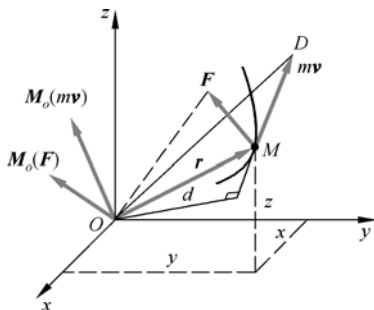


图 5-4 质点的动量矩

动量矩为矢量，垂直于矢径 \mathbf{r} 与速度 \mathbf{v} 所形成的平面，指向按右手法则确定，其大小为

$$|\mathbf{M}_O(m\mathbf{v})| = 2A_{\triangle OMD} = mvd$$

单位为 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ 。

如图 5-5 所示，质点系对点 O 的动量矩等于各质点对同一点 O 的动量矩的矢量和，也称为质点系动量对于点 O 的主矩，用 \mathbf{L}_O 表示，有

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (5-26)$$

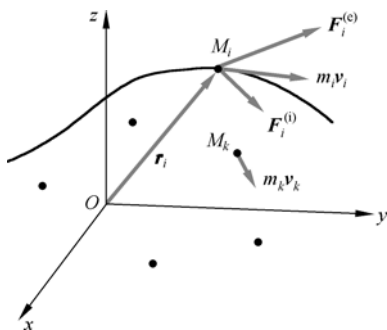


图 5-5 质点系的动量矩

质点系对轴 z 的动量矩等于各质点对同一轴 z 的动量矩的代数和，即

$$L_z = \sum_{i=1}^n M_z(m_i \mathbf{v}_i) \quad (5-27)$$

显然，它等于质点系对该轴上任意一点的动量矩矢量在该轴上的投影。

刚体作为一个特殊的质点系，当平移时，可以将全部质量集中于质心，作为一个质点计算其动量矩。

当刚体绕定轴 z 做定轴转动时，对转动轴 z 的动量矩为

$$L_z = \sum_{i=1}^n M_z(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

记

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \quad (5-28)$$

称其为刚体对轴 z 的转动惯量 (moment of inertia)。于是，有

$$L_z = J_z \omega \quad (5-29)$$

转动惯量的计算

刚体的质量是连续分布的，因此转动惯量的定义式(5-28)可写为积分形式，即

$$J_z = \int_m r^2 dm \quad (5-30)$$

在工程中，常引入回转半径 ρ_z 的概念，将转动惯量表示为

$$J_z = m\rho_z^2 \quad (5-31)$$

式中, m 为刚体的质量。回转半径的单位为 m 或 cm , 其物理意义为: 若将物体的质量集中在以 ρ_z 为半径、轴 z 为对称轴的细圆环上, 则转动惯量不变。

由转动惯量的定义式(5-28)或积分式(5-30), 不难证明如下平行移轴定理: 刚体对于任意一轴的转动惯量 (J_z) 等于刚体对于过质心并平行于该轴的转动惯量 (J_{zC}), 加上刚体质量 (m) 乘以两个轴间距 (d) 的平方, 即

$$J_z = J_{zC} + md^2 \quad (5-32)$$

下面介绍几种简单形状的均质刚体转动惯量的计算。

(1) 长为 l 、质量为 m 的均质细长杆, 如图 5-6(a)所示, 对于过质心 C 且与杆轴线垂直的 z 轴的转动惯量为

$$J_z = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2$$

回转半径为

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \frac{\sqrt{3}}{6} l = 0.2887l$$

如图 5-6(b)所示, 对于过杆端 A 且与轴 z 平行的轴 z_1 的转动惯量为

$$J_{z1} = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2$$

回转半径为

$$\rho_{z1} = \sqrt{3}l/3 = 0.5774l$$

容易验证: $J_{z1} = J_z + m(l/2)^2$ 。

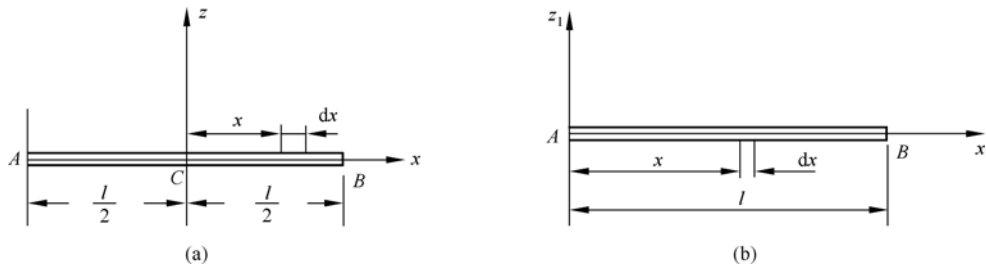


图 5-6 均质细长杆的转动惯量

(2) 半径为 R 、质量为 m 的均质薄圆盘, 如图 5-7 所示, 对于过中心 O 且垂直于圆盘的轴 z 的转动惯量, 其计算方法如下: 取图 5-7(b)所示的质量为 $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$ 的圆环, 此圆环对于轴 z 的转动惯量为 $r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$, 于是整个圆盘对于轴 z 的转动惯量为

$$J_z = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2$$

回转半径为

$$\rho_z = \frac{\sqrt{2}}{2}R = 0.7071R$$

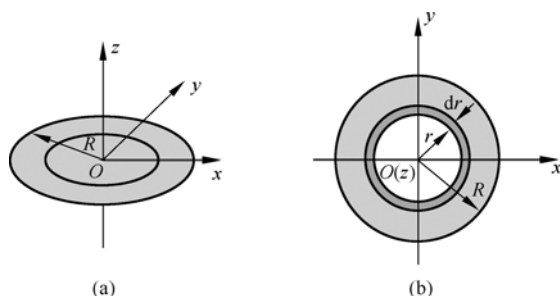


图 5-7 均质薄圆盘的转动惯量

一般简单形状的均质刚体的转动惯量可以用上述方法计算，也可从有关手册中查到。在本书附录 A 中列出了常见均质物体的转动惯量和回转半径，以便读者参考使用。

动量矩定理

将质点的动量矩定义式(5-25)对时间求一次导数，并利用牛顿第二定律（即质点动量定理）的表达式(5-1)，得

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_O(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \quad (5-33)$$

式(5-33)所表示的就是质点的动量矩定理，即质点对固定点 O 的动量矩对时间的一阶导数等于作用于质点上的力对同一点的力矩。

对于由 n 个质点组成的质点系，对其中任意一个质点 M_i 都有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(i)}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) \quad i=1, \dots, n$$

式中， $\mathbf{F}_i^{(i)}$ 、 $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 分别为作用于质点上的内力和外力。求上述 n 个方程的矢量和，得

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(i)}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)})$$

由于内力总是以作用力和反作用力成对出现的，所以 $\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(i)}) = 0$ 。因此，交换上式左端的求和及求导的次序，得

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) \quad (5-34)$$

式(5-34)所表示的就是质点系动量矩定理，即质点系对固定点 O 的动量矩对于时间的一阶导数等于外力系对同一点的主矩。具体应用时，常取其在直角坐标系上的投影式，即

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\mathbf{F}_i^{(e)}), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\mathbf{F}_i^{(e)}), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\mathbf{F}_i^{(e)}) \quad (5-35)$$

动量矩守恒

动量矩定理的表达式(5-34)表明: 内力不能改变质点系的动量矩, 只有作用于质点系的外力才能使质点系的动量矩发生变化; 当外力系对点 O 的主矩为零时, 质点系对点 O 的动量矩为一个常矢量, 即

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(m_i \mathbf{v}_i) = \text{常矢量} \quad (5-36)$$

若外力系对某轴力矩的代数和为零, 则质点系对该轴的动量矩为一个常数。例如, 若 $\sum M_x(\mathbf{F}_i^{(e)}) = 0$, 则 $L_x = \text{常数}$ 。以上规律称为动量矩守恒。

考虑质点在有心力 \mathbf{F} 作用下的运动情况 (行星、卫星的运动大多如此), 如图 5-8 所示, 此时 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = 0$, 所以 $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{常矢量}$, 即 \mathbf{L}_O 的大小和方向不变, 所以质点动量矩守恒。这时有如下结论:

(1) \mathbf{L}_O 方向不变, 即质点在 \mathbf{r} 与 \mathbf{v} 组成的平面内运动, 且此平面在空间的方位不变;

(2) $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 大小不变, 所以 $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = 2A_{\Delta OAC} = \text{常数}$, 如图 5-8 所示。式中, $A_{\Delta OAC}$

为矢径在 dt 时间内扫过的面积, 记为 dA , 则 $\frac{dA}{dt}$ 称为面积速度, 以上说明 $\frac{dA}{dt} = \text{常数}$ 。所以, 在有心力作用下质点的面积速度不变, 称为面积速度定理。该结论可以解释: 绕地球运行的人造卫星, 离地心远时速度小, 离地心近时则速度大。

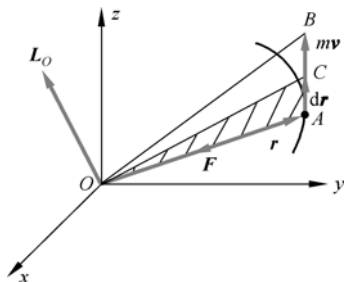


图 5-8 有心力作用下的质点运动

5.3.2 刚体定轴转动的微分方程

如图 5-9 所示, 绕定轴 z 转动的刚体受到 n 个外力的作用, 任意瞬时的角速度为 ω , 则刚体对于固定轴 z 的动量矩为 $L_z = J_z \omega$ 。由于轴承对刚体的约束力对于轴 z 的矩等于零, 所以根据刚体对轴 z 的动量矩定理, 得

$$\frac{d}{dt} J_z \omega = \sum M_z(\mathbf{F})$$

利用角速度 $\omega = \dot{\varphi}$ 和角加速度 $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, 得

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\mathbf{F}_i) \quad \text{或} \quad J_z \alpha = \sum M_z(\mathbf{F}_i) \quad (5-37)$$

上式称为刚体绕定轴转动的微分方程。该方程式表明：外力矩越大，角加速度越大；外力矩相同时，转动惯量越大，角加速度越小。可见，转动惯量是刚体转动惯性的度量。

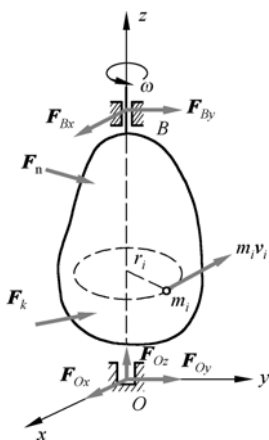


图 5-9 刚体绕定轴 z 的转动

例题 5-3

如例题图5-3所示，复摆重 P ，对质心的回转半径为 ρ_C ，质心距转动轴 O 的距离为 a ，复摆由水平位置无初速地释放。试求：(1) 写出复摆的运动微分方程；(2) 求复摆摆至铅垂位置时转动轴的约束力。

分析：复摆在重力的作用下绕点 O 做定轴转动，可根据刚体定轴转动的微分方程写出复摆的运动微分方程。由于定轴转动属于刚体平面运动的特殊情形，所以可以根据质心运动定理表达式(5-22)求转动轴的约束力。

解：

(1) 系统具有一个自由度，选复摆转角 φ 为广义坐标，复摆在任意位置所受的外力如例题图 5-3(a)所示。根据刚体绕定轴转动的微分方程式(5-37)，得

$$J_O \ddot{\varphi} = M_O$$

其中

$$J_O = \frac{P}{g}(\rho_C^2 + a^2)$$

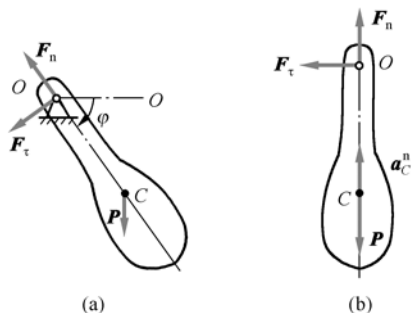
于是，复摆的运动微分方程为

$$\frac{P}{g}(\rho_C^2 + a^2)\ddot{\varphi} = Pa \cos \varphi$$

即

$$(\rho_C^2 + a^2)\ddot{\varphi} - ga \cos \varphi = 0$$

由 $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ 和初始条件 $t=0$ ， $\varphi_0=0$ ， $\dot{\varphi}_0=0$ ，将上式分离变量并积分，可得



例题图 5-3

$$\int_0^{\varphi} \dot{\varphi} d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{ga}{\rho_C^2 + a^2} \cos \varphi d\varphi$$

于是, 复摆在任意位置的角速度为

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2ga}{\rho_C^2 + a^2} \sin \varphi$$

(2) 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi}^2 = \frac{2ga}{\rho_C^2 + a^2}$, 此瞬时复摆的受力如例题图 5-3(b)所示。由质心运动定理表达式(5-24), 得

$$ma_{C\tau} = F_{\tau}, \quad ma_{Cn} = F_n - P$$

其中

$$a_{C\tau} = a\ddot{\varphi} = 0, \quad a_{Cn} = a\dot{\varphi}^2 = \frac{2a^2}{\rho_C^2 + a^2} g$$

所以

$$F_{\tau} = 0, \quad F_n = P \left(1 + \frac{2a^2}{\rho_C^2 + a^2} \right)$$

讨论:

刚体绕定轴转动的微分方程 $J_O \ddot{\varphi} = M_O$ 可与质点运动基本方程 (即牛顿第二定律) $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 类比。运用此方程可求解定轴转动刚体的动力学问题, 因为通过转动轴的未知约束力在外力矩中不出现, 所以对转动轴取矩可直接建立刚体运动微分方程。这是绕定轴转动微分方程的一般用法。当刚体运动确定后, 一般用质心运动定理求转动轴处的未知约束力 (但求力偶矩还需要应用动量矩定理)。

5.4 刚体平面运动微分方程

本节将讨论利用前面的动量定理和动量矩定理建立刚体平面运动的动力学微分方程。

刚体的平面运动可以分解为随质心的平动和绕质心的转动, 而做平面运动的刚体上所受的一般力系可以简化为过质心的主矢和相对质心的主矩。前面讲述的质心运动定理/动量矩定理恰好建立了力系主矢/主矩与平动/转动的运动参量之间的关系。以下, 首先将前述绕固定点的动量矩定理推广到相对质心的形式。

质点系相对质心的动量矩定理

实际上, 前面相对于惯性系中固定点或固定轴的动量矩定理可以推广到相对于一般动点或动轴的情况, 但形式复杂。以下, 仅讨论实际中用到的质点系相对于质心 C 的动量矩定理。

如图 5-10 所示, C 为质点系的质心, 任意一个质点的矢径可表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i'$$

于是, 质点系对于固定点 O 的动量矩为

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_C \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

式中, $\sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C$, $\mathbf{L}_C = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i$ 为质点系相对质心 C 的动量矩, 于是得

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_C \times m \mathbf{v}_C \quad (5-38)$$

式(5-38)表明: 质点系对任意一点的动量矩, 等于质点系对质心的动量矩, 再加上将质点系的动量集中于质心对于点 O 的动量矩。

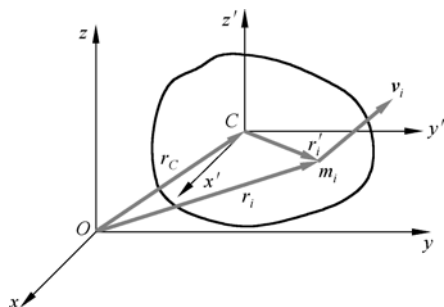


图 5-10 质点系相对于固定点 O 与相对于质心 C 的动量矩之间的关系

将式(5-38)对时间求导, 得

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \times m \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \mathbf{r}_C \times m \mathbf{a}_C$$

外力系对于点 O 的主矩为

$$\mathbf{M}_O^{(e)} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_C \times \sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

式中, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_R^{(e)}$ 为外力系的主矢量, $\sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_C^{(e)}$ 为外力系对于质心 C 的主矩。由动量矩定理表达式(5-34), 得

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} + \mathbf{r}_C \times m \mathbf{a}_C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_R^{(e)} + \mathbf{M}_C^{(e)}$$

借助质心运动定理表达式(5-22), 即 $m \mathbf{a}_C = \mathbf{F}_R^{(e)}$, 得

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)} \quad (5-39)$$

即质点系相对于质心的动量矩对于时间的一阶导数, 等于外力系对质心的主矩。这就是**质点系相对质心的动量矩定理**。

有时利用绝对速度 \mathbf{v}_i 计算质点系对质心 C 的动量矩 ($\mathbf{L}_C = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i$) 并不方便, 因此通常可引入固连于质心的平动参考系, 用相对此参考系的相对速度 \mathbf{v}'_i 计算质点系对质心的动量矩 ($\mathbf{L}_C = \sum \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$)。请读者自己证明这样做是可行的。

由质点系相对质心的动量矩定理可知:

(1) 质点系相对质心的动量矩定理与质点系绕固定点的动量矩定理 [式(5-34)] 具有相同的简单形式, 但相对于任意一个动点的动量矩定理, 则不一定具有此简单的形式 (请读者自己推导结果, 并分析什么情况下有此简单形式);

(2) 质点系相对质心的运动只与外力系对质心的主矩有关, 而与内力无关;

(3) 当外力系相对质心的主矩为零时, 质点系相对质心的动量矩守恒, 即

$$L_C = \text{常矢量}$$

例如, 飞机或轮船必须有舵才能转弯, 当舵有偏角时, 流体推力对质心的力矩使飞机或轮船对质心的动量矩改变; 又如跳水运动员跳水时, 要翻跟头, 就必须脚蹬跳板以获得初速度, 因为在空中时, 重力过质心, 对质心的力矩为零, 质点系对质心的动量矩守恒;

(4) 若将质点系的运动分解为跟随质心的平动和相对质心的运动, 则可分别用质心运动定理和相对质心的动量矩定理来建立这两种运动与外力系之间的关系。

刚体平面运动微分方程

刚体的平面运动可简化为具有相同质量的平面图形在固定平面内的运动, 如图 5-11 所示。其中 $Cx'y'$ 为随质心平动的坐标系, 刚体的平面运动可分解为跟随质心的平动和相对质心的转动。跟随质心的平动遵循质心运动定理 [式(5-22)]; 刚体在相对运动中对质心的动量矩 L_{C_r} 就等于在绝对运动中对质心的动量矩 L_C , 即

$$L_{C_r} = L_C = J_C \omega = J_C \ddot{\phi}$$

所以, 相对质心的动量矩定理 [式(5-39)] 描述了刚体相对质心的转动。上述两组方程便构成了刚体平面运动的微分方程:

$$ma_{Cx} = m\ddot{x}_C = \sum F_{xi}, \quad ma_{Cy} = m\ddot{y}_C = \sum F_{yi}, \quad J_C \alpha = J_C \ddot{\phi} = \sum M_C(F_i) \quad (5-40)$$

应用方程式(5-40)可求解平面运动刚体动力学的两类问题: 已知外力求刚体的运动和已知运动求未知力。但实际问题往往并不是已知全部的外力或全部的运动参量, 而是已知主动力和约束条件, 因此还需要建立反映约束条件的运动学关系, 与方程式(5-40)联立求解。以下, 举例说明方程式(5-40)的应用。

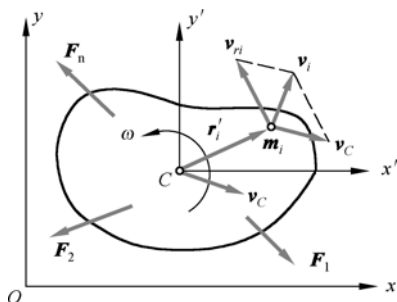
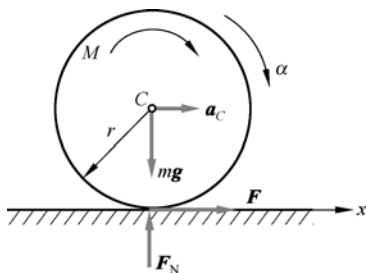


图 5-11 刚体平面运动微分方程

例题 5-4

如图 5-4 所示, 半径为 r 、质量为 m 的均质圆轮沿水平直线纯滚动。设轮的回转半径为 ρ_C , 作用于圆轮上的力矩为 M , 圆轮与地面间的静摩擦系数为 f 。求: (1) 轮心的加速度; (2) 地面对圆轮的约束力; (3) 在不滑动的条件下力矩 M 的最大值。

分析: 圆轮沿水平直线纯滚动, 其运动形式为刚体平面运动, 因此可以利用刚体平面运动方程(5-40)建立作用力与运动参量之间的关系。



例题图 5-4

解:

(1) 圆轮的受力分析。结果如例题图 5-4 所示。

(2) 列出圆轮的平面运动微分方程。由式(5-40)得

$$ma_{Cx} = F, \quad ma_{Cy} = F_N - mg, \quad m\rho_C^2\alpha = M - Fr \quad (a)$$

式中, M 与 α 均以顺时针转向为正。

(3) 建立反映约束条件的运动学关系。因为 $a_{Cy} = 0$, 所以 $a_C = a_{Cx}$ 。在纯滚动(即只滚不滑)的条件下, 有

$$a_C = r\alpha \quad (b)$$

(4) 求解方程。联立求解方程(a)、(b), 得

$$a_C = \frac{Mr}{m(\rho_C^2 + r^2)}, \quad F = ma_C, \quad F_N = mg$$

欲使圆轮只滚动而不滑动, 必须满足 $F \leq f_N$, 即

$$\frac{Mr}{\rho_C^2 + r^2} \leq fmg$$

于是, 得圆轮只滚不滑的条件为

$$M \leq fmg \frac{r^2 + \rho_C^2}{r}$$

对于均质圆盘, 有 $\rho_C = \frac{\sqrt{2}}{2}r$, 于是得

$$M \leq \frac{3}{2}fmg$$

例题 5-5

如例题图 5-5 所示, 对于均质细杆 AB , 其长为 l , 重为 P , 两端分别沿铅垂墙和水平面滑动, 不计摩擦。若杆在铅垂位置受干扰后, 由静止状态沿铅垂面滑下, 求杆 AB 在任意位置的角加速度。

解:

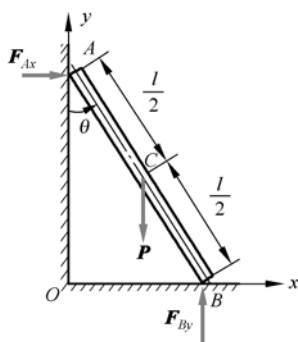
(1) 分析杆在任意位置的受力。结果如例题图 5-5 所示。

(2) 分析杆质心的运动。质心的坐标为

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta, \quad y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

将上式分别对时间求一阶及二阶导数, 得

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$



例题图 5-5

(3) 列出杆的平面运动微分方程。由式(5-40)得

$$m\ddot{x}_C = \sum F_x, \quad \frac{P}{g} \left(-\frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \theta \right) = F_{Ax} \quad (a)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_y, \quad \frac{P}{g} \left(-\frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta - \frac{l}{2} \ddot{\theta} \sin \theta \right) = F_{By} - P \quad (b)$$

$$J_C \ddot{\theta} = \sum M_C(F), \quad \frac{P l^2}{g 12} = F_{By} \frac{l}{2} \sin \theta - F_{Ax} \frac{l}{2} \cos \theta \quad (c)$$

(4) 求解微分方程, 计算角加速度和角速度。

将式(a)乘以 $\frac{l}{2} \cos \theta$, 式(b)乘以 $\frac{l}{2} \sin \theta$, 然后相减得

$$\frac{1}{4} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\theta} = F_{Ax} \frac{l}{2} \cos \theta - F_{By} \frac{l}{2} \sin \theta + P \frac{l}{2} \sin \theta \quad (d)$$

将式(d)与式(c)联立, 消去未知力, 可得任意瞬时的角加速度为

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

欲求未知约束力, 还要求得杆在任意瞬时的速度, 为此将上式改写为

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta$$

根据初始条件 ($\theta=0$ 时, $\dot{\theta}=0$), 对上式积分得

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{3g}{2l} \sin \theta d\theta, \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} (1 - \cos \theta)$$

(5) 求任意瞬时的约束力。

求得任意瞬时的角加速度及角速度后, 代入式(a)和式(b)即可求得任意瞬时的约束力, 其中

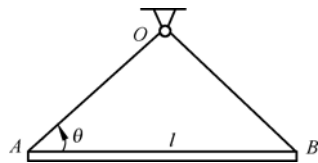
$$F_{Ax} = \frac{3}{4} P \sin \theta (3 \cos \theta - 2)$$

杆脱离约束的条件为 $F_{Ax} = 0$, 由此得出杆脱离约束的位置为

$$3 \cos \theta - 2 = 0, \quad \theta = \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

例题 5-6

如例题图 5-6(a)所示, 均质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 用两根细绳悬挂。设绳与杆的夹角为 θ , 且 $OA = OB$, 求当细绳 OB 被突然剪断时, 绳 OA 的拉力。

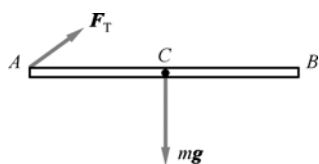


例题图 5-6(a)

解:

(1) 分析绳 OB 被突然剪断时, 杆 AB 的受力。其结果如例题图 5-6(b)所示。

(2) 列写杆的平面运动微分方程。设质心的加速度为 $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Cx} + \mathbf{a}_{Cy}$, 此瞬时杆的角加速度为 α 。由式(5-40)得杆 AB 的动力学方程为



例题图 5-6(b)

$$ma_{Cx} = F_T - mg \sin \theta \quad (a)$$

$$ma_{Cy} = mg \cos \theta \quad (b)$$

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha = F_T \frac{l}{2} \sin \theta \quad (c)$$

由于方程式(a)~(c)包括 a_{Cx} , a_{Cy} , α , F_T 四个未知量, 不能直接求解, 因此需要根据给出的约束条件补充运动学方程。

(3) 建立反映约束条件的运动学关系。以点 A 为基点, 分析点 C 的加速度, 如例题图 5-6(c) 所示, 则有

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_r^{\tau} + \mathbf{a}_r^n$$

剪断绳 OB 瞬时, 杆 AB 的角速度 $\omega = 0$, 所以有 $a_r^n = 0$, $a_r^{\tau} = \alpha l / 2$, 因此

$$\mathbf{a}_{Cx} + \mathbf{a}_{Cy} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_r^{\tau}$$

上式沿 x 方向投影, 得

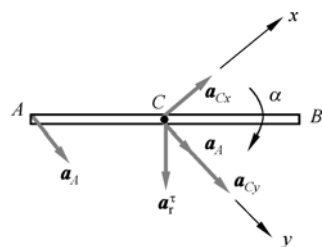
$$a_{Cx} = \frac{l}{2} \alpha \sin \theta \quad (d)$$

(4) 求解方程。联立求解方程式(a)~(d), 得到绳 OB 突然剪断时绳 OA 的拉力为

$$F_T = \frac{mg \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

同时, 可求得该瞬时杆 AB 的角加速度为

$$\alpha = \frac{6 \sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \frac{g}{l}$$



例题图 5-6(c)

通过以上例题可以看到: 做平面运动的刚体有三个自由度, 可用平面运动微分方程式(5-40)描述刚体三个自由度的运动。但在多数情况下存在约束, 此时, 方程中出现未知约束力。由于多余的未知量不能由运动微分方程求得, 因此需要建立反映约束条件的运动学关系式, 作为补充方程与运动微分方程联立求解, 由此可获得所有的未知运动参量和约束力。在刚体平面运动的动力学分析中, 难点往往在于给出约束条件满足的运动学补充方程。

利用刚体平面运动微分方程解题的主要步骤总结如下:

- (1) 受力分析, 画出所有主动力和约束力;
- (2) 列出刚体平面运动的微分方程;
- (3) 建立反映约束条件的运动学关系式, 得到补充方程;
- (4) 联立求解运动微分方程和运动学补充方程;
- (5) 对于有多个刚体连接组成的刚体系, 需要拆开成单个刚体, 分别分析每个刚体的运动和受力, 列出每个刚体的运动微分方程和运动学补充方程。

例题 5-7

如例题图 5-7(a)所示, 质量为 m_2 、长为 l 的均质杆 AB , 其一端铰接于半径为 R 、质量为 m_1 的均质圆轮的中心 A , 圆轮在水平面上做纯滚动, 试写出系统的运动微分方程。

分析: 该系统有两个刚体组成, 所以需要拆开成单个刚体, 分别分析每个刚体的运动和受力, 列出每个刚体的运动微分方程和运动学补充方程。

解:

系统具有两个自由度, 选例题图 5-7(a)所示的杆 AB 与铅垂线的夹角 φ 及圆轮中心 A 的位移 x_A 为广义坐标。

(1) 分析圆轮 A 的运动。其受力如例题图 5-7(b)所示。圆轮 A 的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_A = F_{Ax} - F, \quad 0 = F_{Ay} + F_N - m_1 g, \quad \frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha = FR$$

由于圆轮 A 做纯滚动, 因此满足如下运动学关系:

$$\ddot{x}_A = R\alpha$$

(2) 分析杆 AB 的运动。其受力如例题图 5-7(c)所示。杆 AB 的运动微分方程为

$$m_2 \ddot{x}_C = -F_{Ax}, \quad m_2 \ddot{y}_C = -F_{Ay} - m_2 g,$$

$$\frac{1}{12} m_2 l^2 \ddot{\varphi} = F_{Ax} \frac{l}{2} \cos \varphi + F_{Ay} \frac{l}{2} \sin \varphi$$

杆 AB 的运动学方程有

$$x_C = x_A + \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_A + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$y_C = -\frac{l}{2} \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

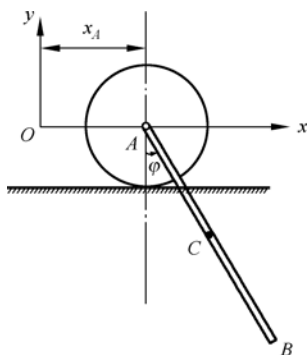
$$\ddot{x}_C = \ddot{x}_A - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\ddot{y}_C = \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi + \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

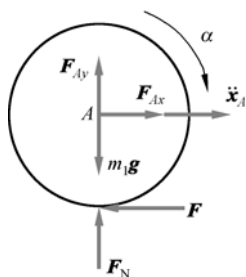
以上杆 AB 的运动微分方程和运动学补充方程共包含 $\ddot{x}_A, \alpha, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{\varphi}, F_{Ax}, F_{Ay}, F, F_N$ 九个未知量, 消去其中未知的约束力, 可得系统的运动微分方程为

$$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x}_A - \frac{1}{2} m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi = 0 \quad (a)$$

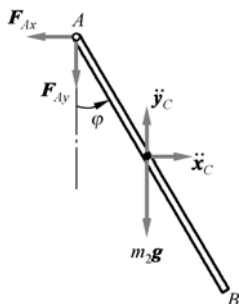
以及



例题图 5-7(a)



例题图 5-7(b)



例题图 5-7(c)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 l + m_2 l \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} - \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_A \cos \varphi + \frac{1}{2} m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + m_2 g \sin \varphi = 0 \quad (\text{b})$$

将式(a)代入式(b), 化简后得

$$\frac{2}{3} l \ddot{\varphi} + \ddot{x}_A \cos \varphi + g \sin \varphi = 0 \quad (\text{c})$$

式(a)和式(c)即为系统的运动微分方程。

5.5 质点系的动能定理

在机械运动中, 外力做功会改变系统的能量(表现为动能和势能)。功和能的转换遵循客观的规律, 从而将力和运动联系起来, 为物体的动力学分析另辟蹊径。本节将介绍其中最基本的规律——动能定理, 并讨论机械能守恒定律。

5.5.1 动能定理

功

如图 5-12 所示, 质点 M 在任意变力 \mathbf{F} 作用下沿曲线运动, 力在无限小位移 $d\mathbf{r}$ 中可视为常力, 小弧段 ds 可视为直线, $d\mathbf{r}$ 可视为沿点 M 的切线。在该无限小位移中力 \mathbf{F} 所做的功称为元功, 以 δW 表示(为了区别于坐标函数的全微分而不用 dW), 其值为

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \theta ds \quad (5-41)$$

或写成直角坐标形式为

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (5-42)$$

力在有限路程 $M_1 M_2$ 上的功为力在此路程上元功的定积分, 即

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^s F \cos \theta ds \quad (5-43)$$

或

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (5-44)$$

式中, 功的单位为 J, $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$ 。

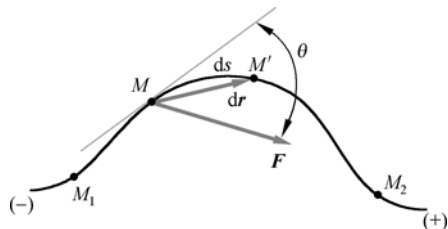


图 5-12 力的功

下面介绍几种常见力的功, 包括重力的功、弹性力的功、定轴转动刚体上作用力的功和平面运动刚体上力系的功。

1. 重力的功

如图 5-13 所示, 质点沿轨迹由 M_1 运动到 M_2 , 重力的功为

$$W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = mg(z_1 - z_2)$$

与质点运动轨迹无关。

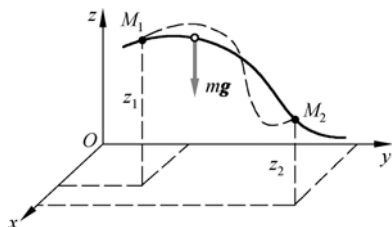


图 5-13 重力的功

对于质点系, 所有质点重力做功之和为

$$\sum W_{12} = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2})$$

由质心坐标公式(5-11), 可得

$$\sum W_{12} = mg(z_{C1} - z_{C2}) \quad (5-45)$$

式中, m 为质点系的质量; $z_{C1} - z_{C2}$ 为质点系运动起始与终了位置质心的高度差。所以, 质点系重力的功也与质心运动轨迹的形状无关。

2. 弹性力的功

设质点受指向固定中心点 O 的弹性力作用, 如图 5-14 所示。当质点的矢径表示为 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ 时, 在弹性限度内弹性力可表示为

$$\mathbf{F} = -k(r - l_0)\mathbf{e}_r$$

式中, k 为弹簧的刚度系数; l_0 为弹簧的原长; \mathbf{e}_r 为沿质点矢径方向的单位矢量。

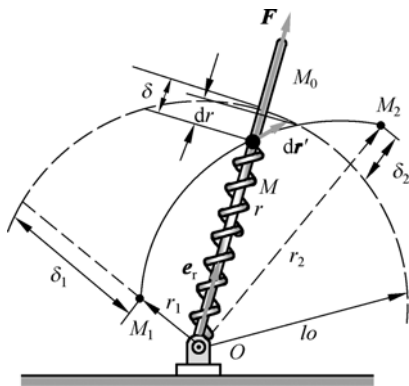


图 5-14 弹性力的功

弹性力在如图 5-14 所示的有限路程 M_1M_2 上的功为

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = \int -k(r - l_0)\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}'$$

因为

$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}' = dr$$

于是

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -k(r-l_0)dr = \frac{1}{2}k[(r_1-l_0)^2 - (r_2-l_0)^2]$$

或

$$W_{12} = \frac{1}{2}k(\delta_1^2 - \delta_2^2) \quad (5-46)$$

式中, δ_1, δ_2 分别为质点在起点及终点处弹簧的变形量。因此, 弹性力在有限路程上的功只决定于弹簧在起始和终止位置的变形量, 而与质点的运动路径无关。

3. 定轴转动刚体上作用力的功

如图 5-15 所示, 作用于定轴转动刚体上的力 F 的元功为

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_\tau ds = F_\tau R d\varphi$$

式中, $F_\tau R = M_z(F) = M_z$, 于是

$$\delta W = M_z d\varphi$$

力 F 在有限转动中的功为

$$W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi \quad (5-47)$$

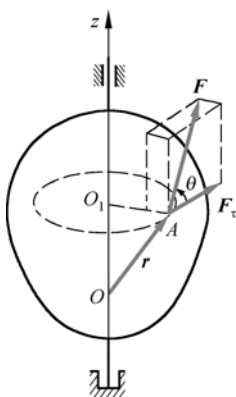


图 5-15 定轴转动刚体上作用力的功

4. 平面运动刚体上力系的功

如图 5-16 所示, 刚体上任意一点 M_i 的无限小位移可写为

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_C + d\mathbf{r}_{iC}$$

式中, $d\mathbf{r}_C$ 为质心的无限小位移; $d\mathbf{r}_{iC}$ 为点 M_i 绕质心 C 的无限小转动位移。于是, 作用于点 M_i 上的力 \mathbf{F}_i 的元功为

$$\delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_C + \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{iC}$$

其中

$$\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_{iC} = F_i \cos \theta \cdot CM_i \cdot d\varphi = M_C(\mathbf{F}_i) d\varphi$$

所以, 作用于刚体上的全部力的元功为

$$\delta W = \sum F_i \cdot d\mathbf{r}_C + \sum M_C(F_i) d\varphi = \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}_C + M_C d\varphi$$

式中, \mathbf{F}_R 为力系的主矢量; M_C 为力系对质心 C 的主矩。

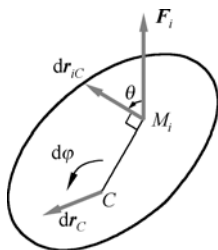


图 5-16 平面运动刚体上力系的功

在有限路程上的功为

$$W_{12} = \int_{C_1}^{C_2} \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}_C + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_C d\varphi \quad (5-48)$$

动能

单个质点的动能定义为 $\frac{1}{2}mv^2$, 其中 m 为质点的质量, v 为质点速度。对于由 n 个质点组成的质点系, 任意一个质点 M_i 在某瞬时的动能为 $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, 质点系内所有质点在某瞬时动能的和称为该瞬时质点系的动能, 以 T 表示, 即

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (5-49)$$

动能是描述质点系运动强度的一个物理量。动能的单位与功的单位相同。

下面介绍刚体运动时的动能计算, 设刚体的质量为 m , 绕质心的转动惯量为 J_C 。

1. 刚体平动的动能

当刚体平动时, 刚体上各点速度相同, 于是, 平动刚体的动能为

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v_C^2 \quad (5-50)$$

2. 刚体绕定轴转动的动能

如图 5-17 所示, 当刚体绕固定轴 z 转动时, 其上任意一点的速度为

$$v_i = r_i \omega$$

于是, 绕定轴转动刚体的动能为

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum m_i r_i^2$$

式中, $\sum m_i r_i^2 = J_z$ 为刚体对轴 z 的转动惯量, 所以得

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (5-51)$$

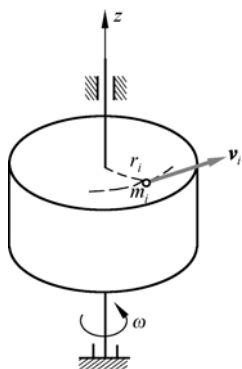


图 5-17 刚体绕定轴转动的动能

3. 刚体平面运动的动能

如图 5-18 所示, 刚体做平面运动时, 可视为绕通过速度瞬心 C' 并与运动平面垂直的轴的转动, 所以参照式(5-51)动能可写为

$$T = \frac{1}{2} J_{C'} \omega^2$$

根据转动惯量的平行轴定理, 有

$$J_{C'} = J_C + md^2$$

代入上式, 得

$$T = \frac{1}{2} J_{C'} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_C + md^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} md^2 \omega^2$$

而 $d\omega = v_C$, 因此有

$$T = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad (5-52)$$

式(5-52)表明: 刚体平面运动时的动能等于跟随质心平动的动能与绕质心转动的动能之和。

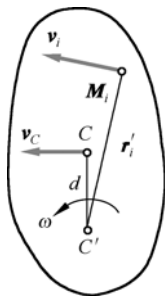


图 5-18 刚体平面运动的动能

动能定理

设质点系由 n 个质点组成, 其中任意一个质点的质量为 m_i , 速度为 \mathbf{v}_i , 作用于该质点上的力为 \mathbf{F}_i 。根据质点动能定理的微分式(5-6), 有

$$d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \delta W_i \quad (i=1, \dots, n)$$

将上述 n 个方程相加, 并交换微分与求和的次序, 得

$$d\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right] = \sum_{i=1}^n \delta W_i$$

式中, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2 = T$ 为质点系的动能; $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ 为作用于质点系上所有力的元功之和。于是, 得质点系动能定理的微分形式: 在质点系无限小的位移中, 质点系动能的微分等于作用于质点系全部力所做的元功之和, 即

$$dT = \sum_{i=1}^n \delta W_i \quad (5-53)$$

对式(5-53)积分, 得

$$T_2 - T_1 = \sum W_i \quad (5-54)$$

式中, T_1 和 T_2 分别表示质点系在任意有限路程运动中的起点和终点时的动能。式(5-54)为质点系动能定理的积分形式: 质点系在任意有限路程的运动中, 起点和终点动能的改变量, 等于作用于质点系的全部力在这段路程中所做功的和。

例题 5-8

如例题图5-8所示, 质量为 m 、半径为 r 的均质圆柱体, 在半径为 R 的固定大圆槽内做无滑动的滚动。试写出系统的运动微分方程。

分析: 本例题以圆柱体为分析对象, 圆柱体的受力如例题图 5-8 所示, 在只滚不滑的情形下, 摩擦力 F 及正压力 F_N 不做功, 只有主动力 mg 做功, 所以为理想约束, 可以利用动能定理建立系统的运动微分方程。

解:

(1) 计算系统的动能。选 θ 为广义坐标, 正方向如例题图 5-8 所示。系统的动能为

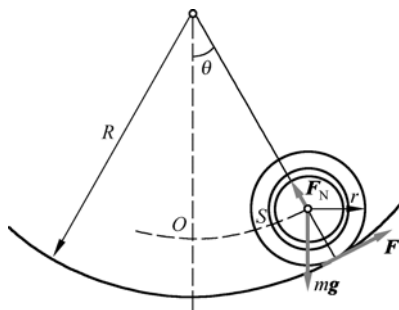
$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

式中

$$v_C = (R-r)\dot{\theta}, \quad \omega = \frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}, \quad J_C = \frac{1}{2}mr^2$$

代入上式后, 得

$$T = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$



例题图 5-8

其微分为

$$dT = \frac{3}{2}(R-r)^2 \dot{\theta} d\dot{\theta} \quad (a)$$

(2) 计算主动力的功。在理想约束的情形下, 只有主动力做功。本例题中只有重力 mg 做功, 其元功为

$$\delta W = -mg(R-r)\sin\theta d\theta \quad (b)$$

(3) 应用动能定理建立系统的运动与受力之间的关系。

将式(a)和式(b)代入动能定理表达式(5-53)中, 得

$$\frac{3}{2}(R-r)^2 \dot{\theta} d\dot{\theta} = -mg(R-r)\sin\theta d\theta$$

两边同除以 dt , 得

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2 \ddot{\theta} = -mg(R-r)\dot{\theta} \sin\theta$$

由此, 得到系统的运动微分方程为

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$$

例题 5-9

提升机构如例题图 5-9 所示, 设启动时电动机的转矩 M 可视为常量, 大齿轮及卷筒对于轴 AB 的转动惯量为 J_2 , 小齿轮、联轴节及电动机转子对于轴 CD 的转动惯量为 J_1 , 被提升的重物重为 P , 卷筒、大齿轮及小齿轮的半径分别为 R, r_2 及 r_1 。略去摩擦和钢丝绳质量, 求重物从静止开始上升距离 s 时的速度和加速度。

分析: 以整个系统 (包括电动机) 为研究对象, 系统所受的约束为理想约束, 只有电动机的转矩 M 和重力 P 做功, 可以利用动能定理建立系统的动能与外力之间的关系。因为动能与系统运动速度相关, 通过对时间求导则可得到加速度。由于系统只有一个自由度, 所以还应考虑各物体运动参量之间的关系。

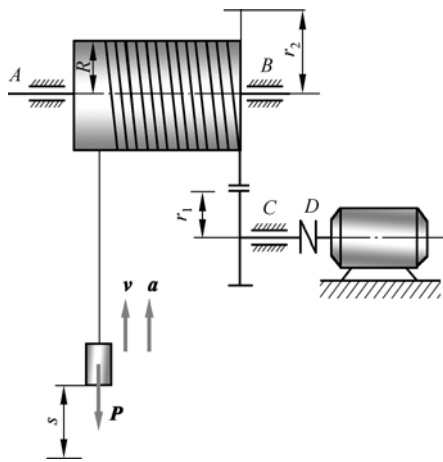
解:

(1) 计算主动力的功。系统所受的约束为理想约束, 只有电动机的转矩 M 和重力 P 做功, 重物在从静止开始上升距离 s 的时段内, 它们所做的功为

$$\sum W = M\varphi_1 - Ps$$

(2) 计算系统的动能。系统由静止状态开始运动, 所以初始位置的动能为

$$T_0 = 0$$



例题图 5-9

当重物上升高度 s 时, 设重物的速度为 v , 轴 AB 和轴 CD 的角速度分别为 ω_2 和 ω_1 , 则系统在此位置的动能为

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} P v^2$$

(3) 应用动能定理, 求解重物的速度。根据动能定理的积分式(5-54), 得

$$\left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 \right) - 0 = M \varphi_1 - P s$$

利用以下运动学关系:

$$\omega_2 = \frac{v}{R}, \quad \omega_1 = \frac{r_2}{r_1} \omega_2 = \frac{r_2}{r_1 R} v, \quad \varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 R} s$$

得

$$\frac{1}{2} \left[\frac{J_1}{R^2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \frac{J_2}{R^2} + \frac{P}{g} \right] v^2 - 0 = \left(\frac{M}{R} \frac{r_2}{r_1} - P \right) s \quad (\text{a})$$

由此, 求得重物的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{M}{R} \frac{r_2}{r_1} - P \right) s}{\frac{J_1}{R^2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \frac{J_2}{R^2} + \frac{P}{g}}}$$

(4) 求重物的加速度。将上式对时间求导数, 并注意到 $v = \frac{ds}{dt}$, 可得重物的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{M}{R} \frac{r_2}{r_1} - P}{\frac{J_1}{R^2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \frac{J_2}{R^2} + \frac{P}{g}}$$

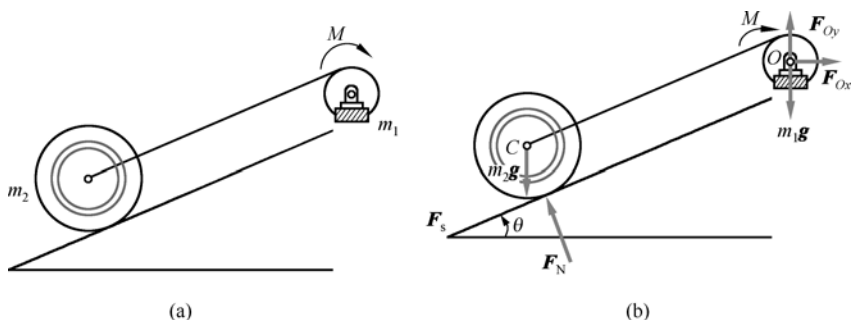
讨论:

(1) 在以上例题的动能定理式(a)中直接建立了重物的速度与上升距离之间的关系, 所以可直接将此式对时间求导得到加速度。

(2) 从上述加速度 a 的表达式中可看出, 分母恒为正值, 因此, 在启动时 $a > 0$, 故要求驱动力矩 $M > PR \frac{r_1}{r_2}$; 启动后若使重物匀速上升, 则要求 $M = PR \frac{r_1}{r_2}$ 。

例题 5-10

卷扬机如例题图 5-10(a)所示。鼓轮在常力偶矩 M 作用下将圆柱体沿斜面上拉。已知鼓轮的半径为 R_1 , 质量为 m_1 , 质量分布在轮缘上; 圆柱体的半径为 R_2 , 质量为 m_2 , 质量均匀分布。设斜面的倾角为 θ , 圆柱体沿斜面只滚不滑。系统从静止开始运动, 求圆柱体中心 C 的速度与其路程之间的关系。



例题图 5-10

分析：以鼓轮和圆柱体组成的整个系统作为分析对象。作用在系统上的力有重力 m_1g , m_2g 和主动力偶矩 M ，以及约束力 F_{Ox} , F_{Oy} 和 F_s , F_N ，如例题图 5-10(b)所示。因为点 O 的位移为零，所以 F_{Ox} , F_{Oy} 的功为零，而圆柱体沿斜面只滚不滑，轮缘上与斜面的接触点为瞬心，法向约束力 F_N 与静滑动摩擦力 F_s 也不做功。因此，所分析的系统为具有理想约束的单自由度系统，可以采取与上一例题相同的思路求圆柱体中心 C 的速度与其路程之间的关系。

解：

(1) 计算主动力的功。只有重力 m_1g , m_2g 和力偶矩 M 对系统做功，其值为

$$\sum W = M\varphi - m_2g \cdot \sin\theta \cdot s$$

式中， φ 为鼓轮转过的角度； s 为圆柱体沿斜面移动的路程。

(2) 计算系统的动能。设鼓轮和圆柱体的角速度分别为 ω_1, ω_2 ，圆柱体的质心速度为 v_C ，则系统起始和运动至某时刻的动能为

$$T_0 = 0, \quad T = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_C^2$$

式中， J_1, J_C 分别为鼓轮对于中心轴 O 和圆柱体对于质心 C 的转动惯量，有

$$J_1 = m_1R_1^2, \quad J_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

利用如下运动关系：

$$\omega_1 = \frac{v_C}{R_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}, \quad \varphi = \frac{s}{R_1}$$

得到某时刻系统的动能为

$$T = \frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v_C^2$$

(3) 应用动能定理建立运动与受力之间的关系。根据动能定理的积分式(5-54)，得

$$\frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v_C^2 - 0 = (M \frac{1}{R_1} - m_2g \cdot \sin\theta)s$$

求解得到圆柱体中心 C 的速度与其路程之间的关系为

$$v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2gR_1 \sin\theta)s}{R_1(2m_1 + 3m_2)}}$$

总结以上例题可以看到：具有理想约束的单个自由度系统，应用动能定理可直接建立系统的速度与位移之间的关系；进一步对时间求导数，可求出系统的加速度。所以，在这种情形下应用动能定理由已知的主动力求解运动是很方便的。

应用动能定理解题的步骤如下：

- (1) 明确分析对象，一般以整个系统为研究对象；
- (2) 分析系统的受力，区分主动力与约束力，在理想约束的情况下约束力才不做功；
- (3) 分析系统的运动，计算力所做的功，计算系统在任意位置的动能或在起始和终止位置的动能，注意利用各物体运动参量之间的关系；
- (4) 应用动能定理建立系统的动力学方程并求解。

功率、功率方程、机械效率

1. 功率

单位时间内力所做的功称为**功率** (power)。功率是衡量机械性能的一项重要指标，用来衡量机械做功的快慢程度。力 F 的元功为 $\delta W = F \cdot dr$ ，所以力的功率为

$$P = \frac{\delta W}{dt} = F \cdot v = F_{\tau} v \quad (5-55)$$

式(5-55)表明：力的功率等于力在力作用点的速度方向上的投影与速度的乘积。

转动物体上力矩或转矩 M 的元功为 $\delta W = M d\varphi$ ，所以力矩或转矩的功率为

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M \omega \quad (5-56)$$

式(5-56)表明：力矩或转矩的功率等于力矩与物体转动的角速度的乘积。

功率的单位是 J/s，称为瓦 (W)。1 W = 1 J/s = 1 N·m/s = 1 kgm²/s³。

2. 功率方程

由质点系动能定理的微分式(5-53)，得

$$\frac{dT}{dt} = \sum \frac{\delta W_i}{dt} = \sum P_i \quad (5-57)$$

该式称为机械的功率方程。任何机械工作时必须输入一定的功率，称为输入功率，记为 $P_{\text{输入}}$ ，其中一部分用于克服阻力等，一般以热能的形式损失掉，这部分功率称为无用功率或损耗功率，记为 $P_{\text{无用}}$ ；其余的用于工作，称为有用功率或输出功率，记为 $P_{\text{有用}}$ 。此时，功率方程式(5-56)可写为

$$\frac{dT}{dt} = P_{\text{输入}} - P_{\text{无用}} - P_{\text{有用}}, \quad \text{或} \quad P_{\text{输入}} = P_{\text{无用}} + P_{\text{有用}} + \frac{dT}{dt} \quad (5-58)$$

式(5-58)表示任意一台机器输入、输出功率和机器动能变化率之间的关系。其中， $P_{\text{有用}} + \frac{dT}{dt}$ 为有效功率，记为 $P_{\text{有效}}$ 。

3. 机械效率

机械在稳定运转时，有效功率与输入功率之比称为**机械效率** (mechanical efficiency)，用 η 表示，即

$$\eta = \frac{P_{\text{有效}}}{P_{\text{输入}}} \times 100\% \quad (5-59)$$

机械效率表征机械对于输入能量的有效利用程度，是评价机械质量的指标之一。它与机械的传动方式、制造精度与工作条件有关，一般情况下 $\eta < 1$ 。

5.5.2 机械能守恒定律

势力场、势能

如果质点在某空间内任意一个位置都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用，则这部分空间就称为**力场**（force field）。例如，地球表面空间的重力场，太阳周围的引力场等。

当质点在某一个力场内运动时，力场作用于质点的力所做的功仅与质点起点和终点位置有关，而与质点运动的路径无关，则这种力场称为**势力场**。质点在势力场内所受的力称为**有势力**（potential force）。从前面介绍的重力、弹性力的做功特点可知，重力和弹性力都是有势力；与重力类似，万有引力也是有势力。

在势力场中质点从某一个位置 M 移至选定的基点 M_0 的过程中有势力所做的功，称为质点在点 M 相对于基点 M_0 的**势能**，以 V 表示，即

$$V = \int_M^{M_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_M^{M_0} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = - \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (5-60)$$

质点在基点 M_0 的势能等于零，所以 M_0 称为**零势能点**。势能的大小是相对于零势能点而言的，零势能点的选取可以是任意的，以计算方便为准。几种常见的势能计算如下。

1. 重力场中的势能

设铅垂方向为轴 z ，零势能点为 z_0 ，重量为 P 的质点在 z 处的势能为

$$V = \int_z^{z_0} -P dz = -P(z_0 - z)$$

为了计算方便，常取 $z_0 = 0$ ，上式可写为

$$V = Pz \quad (5-61)$$

对于质点系或刚体有

$$V = Pz_C \quad (5-62)$$

式中， P 是质点系的总重量； z_C 是质心的坐标。

2. 弹性力场中的势能

设弹簧的刚度系数为 k ，若弹簧的变形量等于 δ_0 时为零势能点，则变形量等于 δ 时的势能为

$$V = \frac{1}{2}k(\delta^2 - \delta_0^2)$$

若取弹簧的自然位置为基点，有 $\delta_0 = 0$ ，于是得

$$V = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (5-63)$$

3. 万有引力场中的势能

设质量为 m_1 的物体受质量为 m_2 的物体的万有引力 \mathbf{F} 的作用, 引力系数为 f , 零势能点到 m_2 的距离为 r_0 , 则 m_1 在距 m_2 为 r 时的势能为

$$V = \int_r^{r_0} -\frac{fm_1m_2}{s^2} ds = fm_1m_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

若零势能点选在无穷远处, 即 $r_0 = \infty$, 则

$$V = -\frac{fm_1m_2}{r} \quad (5-64)$$

由上面的讨论可以看出, 质点或质点系的势能仅与质点或质心的位置有关。在一般情形下, 质点或质点系的势能只是质点或质心坐标的单值连续函数, 这个函数称为势能函数, 可表示为 $V = V(x, y, z)$ 。

势能函数相等的各点所组成的曲面称为等势面, 表示为

$$V = V(x, y, z) = C$$

比如, 重力场的等势面是不同高度的水平面, 弹性力场的等势面是以弹簧固定端为中心的球面。地球引力场的等势面是以地心为中心的不同半径的同心球面。

$C = 0$ 时的等势面称为零等势面, 若选零等势面为势能的基面 (零势面), 则某一个位置的势能就等于势能函数在该位置的函数值。例如, 在重力场中, 一般选水平面为零势面; 在弹性力场中选弹簧自由长度, 即变形为零的位置为零势面; 万有引力场中选无穷远处为零势能位置。

机械能守恒定律

具有理想约束且所受的主动动力皆为有势力的质点系, 称为保守系统 (conservative system)。对于保守系统, 根据动能定理有

$$T_2 - T_1 = \sum W_{12}$$

式中, $\sum W_{12}$ 为系统中所有有势力的功之和。

有势力的功与路径无关, 可通过势能计算。设质点在位置 I 和位置 II 处的势能分别为 V_1 和 V_2 , 则

$$V_1 = W_{10}, \quad V_2 = W_{20}$$

因为有势力的功与路径无关, 所以

$$W_{12} = W_{10} + W_{02} = W_{10} - W_{20} = V_1 - V_2$$

即质点从位置 I 运动到位置 II 时, 有势力的功等于质点在位置 I 和位置 II 时的势能之差。由此, 得

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

即

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E \quad (\text{常量}) \quad (5-65)$$

$E = T + V$ 为质点在某瞬时的动能与势能的代数和, 称为机械能。式(5-65)称为质点的机械能守恒

定律，即保守系统在运动过程中，其机械能保持不变。或质点的动能和势能可以互相转化，但总的机械能保持不变。上述结论对质点系同样成立。

由于有势力场具有机械能守恒的特性，因此势力场又称为保守力场，而有势力又称为保守力。质点系在非保守力作用下运动时，机械能不守恒。例如，摩擦力做功时总是使机械能减小，但是减小的能量并未消失，而是转化为另一种形式的能量（热能）。如果考虑了各种形式能量（如电磁能、化学能、热能等）的转化，对于整个系统来说，总的能量仍是守恒的，这就是普遍形式的能量守恒定律，机械能守恒定律只不过是它的特殊情形。

机械能守恒定律同样提供了物体运动与受力（有势力）之间的关系，因此可用来分析物体的动力学问题。

例题 5-11

试利用机械能守恒定律求解例题 5-8。

分析：由于圆柱体做纯滚动，所以摩擦力不做功，只有重力（有势力）做功，因此圆柱体的机械能守恒。

解：

设圆柱体的初始位置在质心 C 位于最低位置处，此时圆柱体的动能为 T_0 ，即给圆柱体一个初始速度，势能 $V_0 = 0$ 。圆柱体在任意位置的动能为

$$T = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

势能为

$$V = mg(R-r)(1 - \cos\theta)$$

由机械能守恒定律 $T_0 + V_0 = T + V$ ，得

$$T_0 + 0 = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)(1 - \cos\theta)$$

上式两边对时间求导后，可得到与例题 5-8 完全相同的结果。

5.6 普遍定理的综合应用

质点系动力学普遍定理包括质点系动量定理、质点系动量矩定理、质点系动能定理。它们以不同的形式建立了质点系的运动与受力之间的关系。动量定理和动量矩定理分别建立了质点系动量和动量矩与质点系所受外力系的主矢和主矩之间的关系，它们是矢量形式。动能定理建立了质点系的动能与作用于质点系上的力的功之间的关系，是标量形式。

作用在系统上的力在动量和动量矩定理中一般按外力和内力分类。在动能定理中力一般按主动力和约束力分类，在理想约束的情形下约束力的功之和为零。

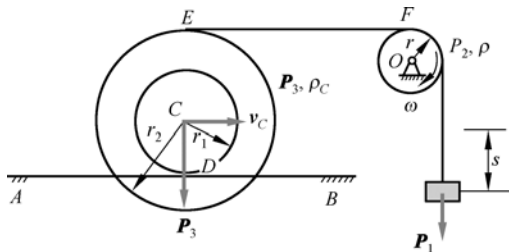
应用质点系普遍定理可以解决质点系动力学的两类问题：已知外力求解运动和已知运动规律求解未知外力。在实际应用中，对于具有理想约束的单自由度系统，经常用动能定理解决已知力求运动的问题。在主动动力为有势力的情形下，还可以应用机械能守恒定律求系统的运动。系统的运动规律确定后，一般用动量或动量矩定理求未知约束力。

虽然前面介绍的基本方程提供了解决动力学问题的一般方法，但在求解复杂问题时往往要根据实际情况，巧妙地联合运用这些基本定理。以下举例说明。

例题 5-12

如例题图 5-12(a)所示，滚轮重 P_3 ，半径为 r_2 ，对质心的回转半径为 ρ_C ，半径为 r_1 的轴颈沿 AB 无滑动滚动。滑轮重 P_2 ，半径为 r ，回转半径为 ρ ，重物重 P_1 。

求：(1) 重物的加速度；(2) EF 段绳的张力；(3) 接触点 D 处的约束力。



例题图 5-12(a)

分析：系统具有一个自由度，选重物的位移 s 为广义坐标。系统具有理想约束，由动能定理建立系统运动与主动力之间的关系。

解：

(1) 系统在任意位置的动能为

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \rho^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \rho_C^2 \frac{v_C^2}{r_1^2}$$

式中， $\omega = \frac{v}{r}$ ， $v_C = \frac{r_1}{r_1 + r_2} v$ 。所以

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{P_3}{g} \frac{r_1^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{P_3}{g} \frac{\rho_C^2}{(r_1 + r_2)^2} \right] v^2$$

令

$$M = \frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{P_3}{g} \frac{r_1^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{P_3}{g} \frac{\rho_C^2}{(r_1 + r_2)^2}$$

称为当量质量或折合质量，则有

$$T = \frac{1}{2} M v^2$$

由动能定理，得

$$T - T_0 = \sum W, \quad \frac{1}{2} M v^2 - T_0 = P_1 s$$

上式两边对时间求导数，得

$$M v a = P_1 v$$

解得重物的加速度为

$$a = \frac{P_1}{M} = \frac{P_1}{P_1 + P_2 \frac{\rho^2}{r^2} + P_3 \frac{r_1^2 + \rho_C^2}{(r_1 + r_2)^2}} g$$

(2) 假想将 EF 段绳子剪断, 考虑滑轮与重物组成的系统, 如例题图 5-12(b) 所示。由动量矩定理, 得

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{P_2}{g} \rho^2 \omega + \frac{P_1}{g} r v \right) = P_1 r - F_T r$$

解得绳子的张力为

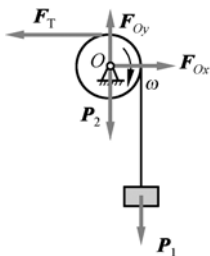
$$F_T = P_1 - \left(\frac{P_2}{g} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{P_1}{g} \right) a$$

(3) 以滚轮为分析对象, 受力如图(c)所示。由质心运动定理, 得

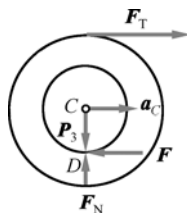
$$\begin{cases} \frac{P_3}{g} a_C = F_T - F \\ 0 = F_N - P_3 \end{cases}$$

求解得

$$F = F_T - \frac{P_3}{g} a_C = P_1 - \left(\frac{P_2}{g} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{P_1}{g} + \frac{P_3}{g} \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right) a, \quad F_N = P_3$$



例题图 5-12(b)



例题图 5-12(c)

讨论:

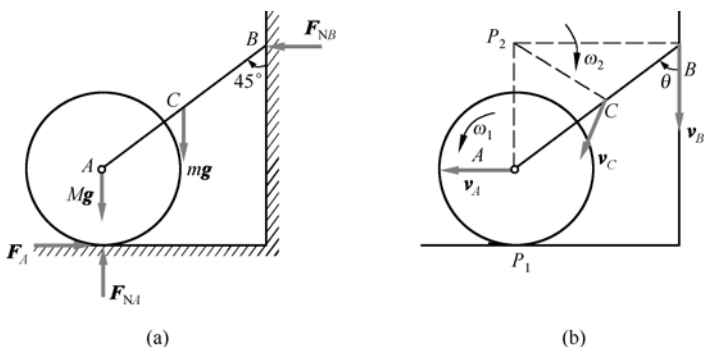
(1) 对于具有理想约束的单自由度系统, 一般以整体系统作为分析研究对象, 应用动能定理直接建立主动力的功与广义速度之间的关系, 在方程式中不涉及未知的约束力。将所得方程对时间 t 求一次导数, 可得到作用在系统上的主动力与加速度之间的关系。待运动确定后, 再选择不同的分析研究对象, 应用动量或动量矩定理求解未知的约束力。

(2) 特别需要指出的是, 采用只能求解一个未知量的动能定理来分析多个物体组成的刚体系统, 必须附加运动学的补充方程, 明确各物体速度间的运动学关系。

(3) 若一开始就将系统拆开, 以单个刚体作为研究对象, 则需要分别应用动量定理(质心运动定理)、动量矩定理(定轴转动微分方程)等, 分别建立动力学方程, 然后联立求解。读者可试用此方法求解, 并与本例中的方法相比较。

例题 5-13

如例题图 5-13(a)所示, 均质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 上端 B 靠在光滑墙上, 另一端 A 用光滑铰链与车轮轮心相连接。已知车轮质量为 M , 半径为 R , 在水平面上做纯滚动, 滚阻忽略不计。设系统从图示位置无初速开始运动, 求该瞬时轮心 A 的加速度。



例题图 5-13

分析: 本例为单自由度刚体系统, 所要求的量为加速度, 可在一般位置上应用动能定理建立方程, 通过对时间求导得到加速度。另外, 由于系统中只有有势力做功, 故也可用机械能守恒定律求解。一般后者更为简便。

解:

(1) 选系统整体作为研究对象, 进行受力分析。

系统受力如例题图 5-13(b)所示。考察杆 AB 由例题图 5-13(a)所示的位置 ($\theta = 45^\circ$) 运动到例题图 5-13(b)所示的位置 (任意 $\theta > 45^\circ$)。

以水平面为零势位置, 则在两个位置处系统的势能分别为

$$V_1 = mg\left(R + \frac{l}{2}\cos 45^\circ\right) + MgR = \text{常量}$$

$$V_2 = mg\left(R + \frac{l}{2}\cos \theta\right) + MgR$$

(2) 对系统进行运动分析

设在任意位置时, 轮心速度为 v_A (水平向左)。点 B 速度由于墙面约束的关系, 铅直向下, 车轮做纯滚动, 其速度瞬心为 P_1 , 而杆 AB 做平面运动, 其速度瞬心为 P_2 , 如图(b)所示, 其中 $CP_2 = \frac{l}{2}$ 。于是, 可得到下列运动学关系式

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R}; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{l\cos\theta}; \quad v_C = \frac{l}{2}\omega_2 = \frac{v_A}{2\cos\theta} \quad (\text{a})$$

据此, 得到系统在两个位置处的动能分别为

$$T_1 = 0; \quad T_2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_2^2$$

式中, $J_A = \frac{1}{2}MR^2$, $J_C = \frac{1}{12}ml^2$ 。将运动学关系式(a)代入上式, 得

$$T_2 = \left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{6\cos^2\theta}m \right) v_A^2$$

(3) 应用机械能守恒定律

将上述结果代入机械能守恒定律表达式：

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2,$$

得

$$\left(\frac{3}{4}M + \frac{1}{6\cos^2\theta}m \right) v_A^2 + mg \left(R + \frac{l}{2}\cos\theta \right) + MgR = V_1 = \text{常量}$$

将上式对时间求一次导数，得

$$\left(\frac{3}{2}M + \frac{1}{3\cos^2\theta}m \right) v_A \dot{v}_A + \left(\frac{\sin\theta\dot{\theta}}{3\cos^3\theta}m \right) v_A^2 - mg \frac{l}{2} \sin\theta \dot{\theta} = 0$$

注意到

$$\dot{v}_A = a_A, \quad \dot{\theta} = \omega_2 = \frac{v_A}{l\cos\theta},$$

于是，有

$$\left(\frac{3}{2}M + \frac{1}{3\cos^2\theta}m \right) a_A + \left(\frac{\sin\theta}{3l\cos^4\theta}m \right) v_A^2 - mg \frac{1}{2} \tan\theta = 0$$

上式从 $\theta \geq 45^\circ$ 到 B 端离开墙面之前的全过程均成立。

当 $\theta = 45^\circ$ 时， $v_A = 0$ ，代入上式有

$$a_A = \frac{3mg}{9M + 4m}$$

讨论：

(1) 在系统从静止开始运动的瞬时，物体上各点的速度、刚体的角速度均为零，要想求该瞬时的加速度，必须首先考察系统在任意位置的动能和势能，然后才可能对机械能守恒定律的表达式求导数。

(2) 因为机械能守恒定律给出的是一个标量方程，只能解一个未知量，因此对于本例中两个平面运动的刚体，要应用刚体平面运动的速度分析方法，将所有的运动量用一个未知量表示。

(3) 本例也可应用积分形式的动能定理求解，所得结果是一致的。读者可以自行验证。

5.7 碰撞

两个或两个以上的运动物体在瞬间接触并发生速度突然改变的过程称为**碰撞** (impact)。碰撞在工程中非常普遍，如锤锻、打桩、飞船对接、飞机着陆等。本节仅对碰撞过程的分析进行简要介绍。

碰撞问题的难点是碰撞过程中碰撞力的变化规律难以确定。通常，只能分析碰撞前后物体运动的变化。因此，解决工程问题时，需要根据碰撞的特点，进行适当的简化，可假设：

(1) 碰撞过程中，由于碰撞力极大，重力等非碰撞力可以忽略不计。

(2) 由于碰撞时间极短，物体的位置基本没有改变，故物体的位移可忽略不计。

碰撞的恢复因数

若碰撞前后两球的质心速度矢量与两球接触面的公法线共线，则称为正碰撞。碰撞中，两球变形与恢复阶段的冲量之比，或碰撞后相对分离的速度与碰撞前相对接近的速度之比，称为恢复因数（coefficient of restitution），即

$$e = \frac{I_2}{I_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (5-66)$$

对于刚体，恢复因数应改写为

$$e = \frac{I_2}{I_1} = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} \quad (5-67)$$

式中， v_{1n} , v_{2n} 和 u_{1n} , u_{2n} 分别为刚体碰撞前后的速度在接触点公法线方向的投影。

恢复因数 e 与碰撞物体的性质有关，由实验测定。 e 的值在 $0 \sim 1$ 之间。当 $e = 1$ 时，为完全弹性碰撞；当 $e = 0$ 时，为完全非弹性碰撞。

碰撞的基本定理

由于碰撞过程常伴有机能的损失（如发热、发声、发光等），而且碰撞过程很短暂，难以计算力做功，因此不便于用动能定理分析。一般而言，采用动量定理和动量矩定理的积分形式进行研究。

1. 冲量定理

动量定理的积分形式为

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i^{(e)} \quad (5-68)$$

式中

$$\mathbf{p}' = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{I}_i^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} dt$$

式中， \mathbf{v}_i 和 \mathbf{v}_i' 分别为质点 i 在时刻 t_1 和 t_2 的速度， $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 为作用于质点 i 上的质点系外力。将式(5-68)写成质心运动定理形式为

$$m\mathbf{v}_C' - m\mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i^{(e)} \quad (5-69)$$

2. 冲量矩定理

动量矩定理的积分形式为

$$\mathbf{L}_O' - \mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{I}_i^{(e)}) \quad (5-70)$$

式中， \mathbf{L}_O' 与 \mathbf{L}_O 分别为 t_2 及 t_1 时刻质点系对点 O 的动量矩， \mathbf{r}_i 为质点 i 的矢径，根据前面的假设，在碰撞过程中它是不变的。

定轴转动的物体发生碰撞时的基本定理为

$$\begin{cases} m\mathbf{u}_C - m\mathbf{v}_C = \sum \mathbf{I}_i^{(e)} \\ J_O\omega_2 - J_O\omega_1 = \sum M_O(\mathbf{I}_i^{(e)}) \end{cases} \quad (5-71)$$

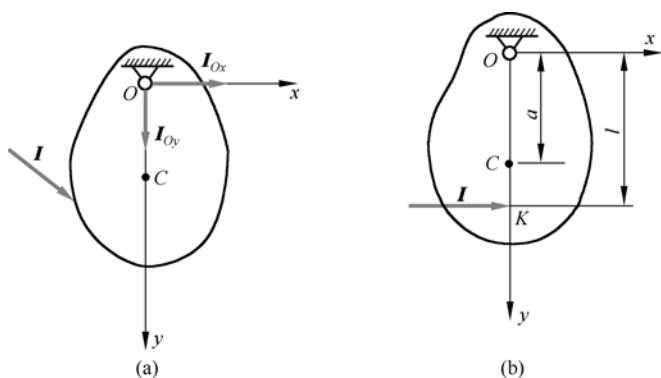
平面运动的物体发生碰撞时的基本定理为

$$\begin{cases} m\mathbf{u}_C - m\mathbf{v}_C = \sum \mathbf{I}_i^{(e)} \\ J_C\omega_2 - J_C\omega_1 = \sum M_C(\mathbf{I}_i^{(e)}) \end{cases} \quad (5-72)$$

具体应用时, 根据具体情形, 将基本定理的表达式与碰撞因数公式联立起来, 再加上运动学补充方程, 即可求得问题的解答。

例题 5-14

如例题图 5-14 所示, 绕定轴 O 转动的刚体质量为 m , 对轴 O 的转动惯量为 J_O , 该刚体的质量对称面在图示平面内。今有外碰撞冲量 I 作用在对称平面内, 试分析轴承的约束碰撞力冲量 I_O 。



例题图 5-14

解:

过质心建立坐标系, 如例题图 5-14(a)所示。应用冲量定理, 有

$$\begin{cases} m\mathbf{u}_{Cx} - m\mathbf{v}_{Cx} = I_x + I_{Ox} \\ m\mathbf{u}_{Cy} - m\mathbf{v}_{Cy} = I_y + I_{Oy} \end{cases}$$

式中, u_{Cx}, u_{Cy} 和 v_{Cx}, v_{Cy} 分别为碰撞前后质心 C 的速度在轴 x, y 上的投影。

若图示位置是发生碰撞的位置, 则有 $u_{Cy} = v_{Cy} = 0$, 于是, 轴 O 处的约束碰撞力为

$$I_{Ox} = m(u_{Cx} - v_{Cx}) - I_x, \quad I_{Oy} = -I_y \quad (a)$$

可见, 在一般情形下, 会在轴承处引起碰撞冲量。这种碰撞冲量将使轴承和轴发生损伤, 所以实际设计时, 应当尽量避免。为使轴承处碰撞冲量等于零, 根据式(a), 必须有

$$I_x = m(u_{Cx} - v_{Cx}) \quad (b)$$

$$I_y = 0 \quad (c)$$

为使式(c)成立, 外冲量必须沿着垂直于 OC 的方向, 如例题图 5-14(b)所示。为使式(b)成立, 可得

$$l = \frac{J_O}{ma} \quad (d)$$

式中, a 为质心 C 至点 O 的距离; l 为外碰撞冲量 I 的作用线至点 O 的距离。满足式(d)的点称为撞击中心 (center of collision)。

讨论：

本例题的结论在实际中有很多应用。如摆式撞击试验机使用中使撞击点恰好在撞击中心，则可以避免轴承处出现撞击力。又如用锤子锤钉子，手握在撞击中心可以避免手受到冲击力。如图 5-19 所示，可以证明，当手握处 O 距锤头 A 的距离满足 $l = J_O / (mb) = a + \rho_C^2 / a = b + \rho_C^2 / b$ (ρ_C 为锤子对质心 C 的回转半径) 时，手不会受到冲击力作用。

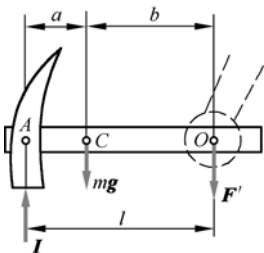
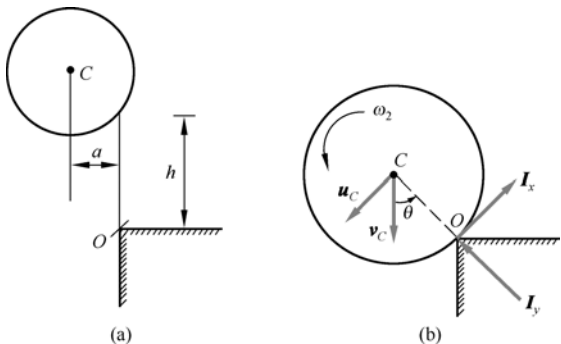


图 5-19 手握在撞击中心，以避免受到冲击力

例题 5-15

如例题图 5-15(a)所示，质量 $m = 2\text{ kg}$ 的匀质圆盘由静止从高度 $h = 1\text{ m}$ 处自由落下，碰在一个固定尖角 O 上。若圆盘半径 $r = 20\text{ cm}$ ，中心距点 O 的水平距离 $a = 8\text{ cm}$ ，设恢复系数 $e = 0$ ，接触时无滑动，试求：(1) 碰撞结束瞬时圆盘质心的速度与角速度；(2) 点 O 的碰撞冲量；(3) 碰撞时的能量损失。



例题图 5-15

分析：首先根据圆盘的运动和恢复因数，确定碰撞前后圆盘速度、角速度、动量和动量矩的变化，结果如下表所示。其中，由于碰撞点无滑动，所以碰撞后圆盘碰撞点的速度为零（因为 $e = 0$ ），因此碰撞可看成绕点 O 的定轴转动，如例题图 5-15 所示。

	圆盘质心和碰撞点的速度	圆盘角速度	圆盘动量	圆盘角动量
碰撞前	自由下落 h 后速度的大小： $v_C = v_D = \sqrt{2gh} = 4.43\text{ m/s}$ 方向：竖直向下	$\omega_1 = 0$	$p = mv_C$	$L_O = mv_C \cdot a$
碰撞后	$e = 0 \Rightarrow u_{Dn} = 0$ $u_C = ?$ ，方向：垂直于 OC	$\omega_2 = ?$	$p' = mu_C$	$L'_O = J_O \omega_2$
	运动学关系：碰撞点无滑动（定轴转动） $\Rightarrow u_C = r\omega_2$			

解：

(1) 根据冲量矩定理 $L'_O - L_O = \sum_{i=1}^n M_O(I_i^{(e)})$ ，得

$$J_O \omega_2 - mv_C \cdot a = 0$$

由此，求得碰撞后圆盘的角速度为

$$\omega_2 = 2v_C a / (3r^2) = 5.91\text{ rad/s}$$

碰撞后圆盘质心的速度为

$$u_C = r\omega_2 = 1.18 \text{ m/s}$$

(2) 根据冲量定理 $\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{I}_i^{(e)}$ 得点 O 的碰撞冲量为

$$I_x = -mu_C + mv_C \sin \theta = 1.184 \text{ N}\cdot\text{s}$$

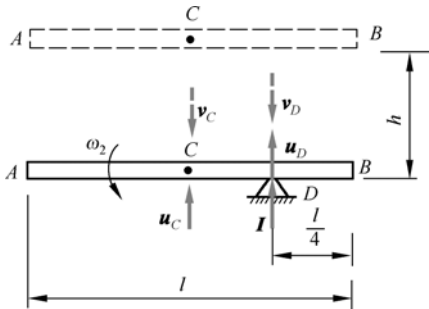
$$I_y = mv_C \cos \theta = 8.12 \text{ N}\cdot\text{s}$$

(3) 碰撞时的能量损失为

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}J_O\omega_2^2 = 17.53 \text{ J}$$

例题 5-16

如例题图 5-16 所示, 质量为 m 、长为 l 的均质杆 AB , 自水平位置自由下落一段距离 h 后, 与光滑支座 D 相碰撞, $BD = l/4$ 。假设恢复因数为 $e = 1$, 求碰撞后的角速度和碰撞冲量。



例题图 5-16

分析: 首先根据杆的运动和恢复因数, 确定碰撞前后杆的速度、角速度、动量和动量矩变化, 结果如下表所示。由于碰撞后杆碰撞点的速度不为零 (因为 $e = 1 \neq 0$), 所以碰撞应看成杆的刚体平面运动。

	杆质心和碰撞点的速度	杆的角速度	杆的动量	杆的角动量
碰撞前	自由下落 h 后速度的大小: $v_C=v_D(=v_{D_y})=-\sqrt{2gh}$ 方向: 竖直向下 (设为负)	$\omega_1=0$	$p=mv_C$	$L_C=0$
碰撞后	$e=1=\frac{0-u_{D_y}}{v_{D_y}-0}\Rightarrow$ $u_{D_y}=-ev_{D_y}=e\sqrt{2gh}$ $u_C=?$, 方向: 竖直向上	$\omega_2=?$	$p'=mu_C$	$L'_C=J_C\omega_2$
	运动学关系: 平面运动 $\Rightarrow u_{D_y}=u_C+\frac{l}{4}\omega$			

解:

由题意可知, 杆下落时做平移, 与地面碰撞前的速度 $v_C = v_D (= v_{Dy}) = -\sqrt{2gh}$ (方向竖直向下, 设为负)。杆碰撞后的位置如例题图 5-16 所示。设 I 为碰撞冲量, u_C 为碰撞后质心的速度, ω 为杆角速度。碰撞后杆做平面运动, 则

$$p' - p = mu_C - mv_C = I \tag{a}$$

$$J'_C - J_C = \frac{1}{12}ml^2\omega - 0 = I\frac{l}{4} \tag{b}$$

恢复因数为

$$e=1=\frac{0-u_{Dy}}{v_{Dy}-0}$$

(c)

运动学补充方程为

$$\boldsymbol{u}_D=\boldsymbol{u}_C+\boldsymbol{u}_{DC}$$

将上式在铅垂方向投影，有

$$u_{Dy}=u_C+\frac{l}{4}\omega$$

代入式(c)，得

$$1=-\frac{u_C+\frac{l}{4}\omega}{-\sqrt{2gh}},\quad u_C=\sqrt{2gh}-\frac{l}{4}\omega$$

将上式与式(a)、式(b)联立求解，得

$$u_C=\frac{\sqrt{2gh}}{7},\quad \omega=\frac{24\sqrt{2gh}}{7l},\quad I=\frac{8m\sqrt{2gh}}{7}$$

本章小结

动力学基本定理将物体的运动和所受的力联系起来，使得力对物体运动效果的定量分析成为可能，从而奠定了力学的基础。本章的主要内容总结为下表。

		运 动		动力学基本定理 ↔	力
		(角) 速度, (角) 加速度	动量 (矩), 动能		(合) 力, (合) 力矩 主矢, 主矩; 功
质点		$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a} [\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}]$	$m\boldsymbol{v}$	动量定理 (牛顿第二定理) $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \sum \boldsymbol{F}_i \quad [m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_i]$	(合) 力: $\sum \boldsymbol{F}_i$
质点系	一般情况 (三大基本定理)	$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{a}_i [\dot{\boldsymbol{r}}_i, \ddot{\boldsymbol{r}}_i]$	$m_i \boldsymbol{v}_i$	动量定理: $\frac{d}{dt}(\sum m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$	外力主矢: $\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$
		$\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i [\dot{\boldsymbol{r}}_i]$	$\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$	动量矩定理: $\frac{d}{dt}(\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$	外力主矩: $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$
		$\boldsymbol{v}_i [\dot{\boldsymbol{r}}_i]$	$\frac{1}{2} m_i v_i^2$	动能定理: $\frac{d}{dt}(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2) = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$	外力元功: $\sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$
	质心运动	$\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{a}_C [\dot{\boldsymbol{r}}_C, \ddot{\boldsymbol{r}}_C]$	$m\boldsymbol{v}_C$	质心运动定理: $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_C) = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} \quad [m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}]$	外力主矢: $\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$
	刚体定轴转动	$\omega, \alpha [\dot{\phi}, \ddot{\phi}]$	$J_z \omega$	绕定轴转动的动量矩定理: $J_z \alpha = J_z \dot{\omega} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$	外力主矩: $\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$
	刚体平面运动	$\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{a}_C [\dot{\boldsymbol{r}}_C, \ddot{\boldsymbol{r}}_C]$ $\omega, \alpha [\dot{\phi}, \ddot{\phi}]$	$m\boldsymbol{v}_C$ $J_C \omega$	质心运动定理: $m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 相对质心的动量矩定理: $J_z \dot{\omega} = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$	外力主矢: $\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 外力主矩: $\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$

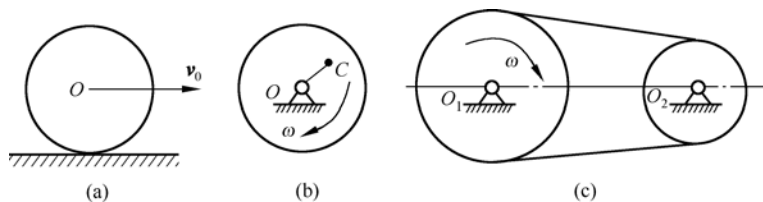
注：① 将微分形式的基本定理积分 \Rightarrow 积分形式的基本定理（冲量定理、冲量矩定理、动能定理）；

② 外力合力（矩）、主矢、主矩、功=0 \Rightarrow 守恒定理（动量守恒、动量矩守恒、机械能守恒）。

思考题

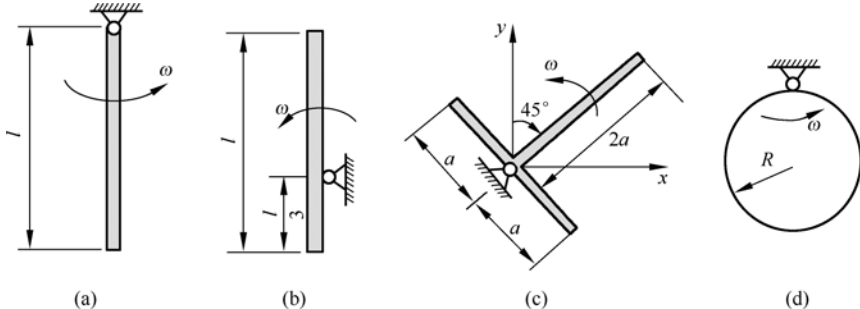
5-1 计算思考题图 5-1 所示情况下系统的动量。

- 质量为 m 的匀质圆盘沿水平面滚动，圆心 O 的速度为 v_0 ；
- 非匀质圆盘以角速度 ω 绕轴 O 转动，圆盘质量为 m ，质心为 C ，偏心距 $OC = a$ ；
- 胶带轮传动，大轮以角速度 ω 转动，设胶带及两个胶带轮为匀质的。



思考题图 5-1

5-3 试求思考题图 5-3 所示各均质物体对其转轴的动量矩。



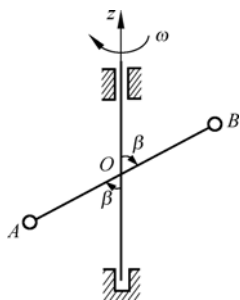
思考题图 5-3

5-4 质点系对任意一个动点 A 的动量矩定理是

否都可以写成 $\frac{dL_A}{dt} = M_A$ 的形式？什么情况下具有这种形式？

5-5 如思考题图 5-5 所示，不考虑重量的刚杆焊接在轴 z 上，与轴 z 夹角 $\beta \neq 90^\circ$ ，两球 A, B 质量相同，焊接在杆两端，且 $AO = OB$ ，系统绕轴 z 以不变的角速度 ω 转动，试判断下述说法是否正确。

- 系统对点 O 的动量矩守恒，对轴 z 的动量矩不守恒。
- 系统对点 O 的动量矩不守恒，对轴 z 的动量矩守恒。
- 系统对点 O 及轴 z 的动量矩都守恒。
- 系统对点 O 及轴 z 的动量矩都不守恒。



思考题图 5-5

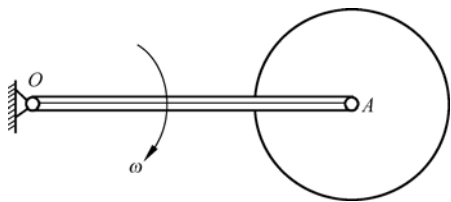
5-2 试判断下述说法是否正确？

- 质点系的动量一定大于其中单个质点的动量。
- 若质点系内质点的动量皆为零，则质点系的动量必为零。
- 若质点系内质点的动量皆不为零，则质点系的动量必不为零。

5-6 在思考题图 5-6 中，杆 OA 长为 l ，质量不计，均质圆盘半径为 R ，质量为 m ，圆心在点 A 。已知杆 OA 以角速度 ω 绕轴 O 转动。试选择如下几种情况下圆盘对定点 O 的动量矩：

- ① 圆盘固连于杆 OA 上;
- ② 圆盘绕轴 A 相对于杆以角速度 $-\omega$ 转动;
- ③ 圆盘绕轴 A 相对于杆以角速度 ω 转动;
- ④ 圆盘以绝对角速度 ω 绕轴 A 转动;
- ⑤ 圆盘以绝对角速度 $-\omega$ 绕轴 A 转动。

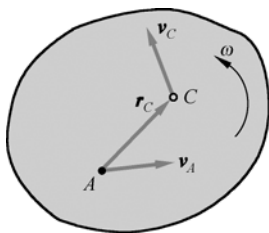
A $L_0 = ml^2\omega$ B $L_0 = m\omega(R^2 + l^2)$
 C $L_0 = m\omega\left(l^2 - \frac{R^2}{2}\right)$ D $L_0 = m\omega\left(\frac{R^2}{2} + l^2\right)$



思考题图 5-6

5-7 如思考题图 5-7 所示, 已知质量为 M 的刚体做平面运动, 其角速度为 ω , 质心 C 的速度为 v_C 。A 为刚体上任意一点, 点 C 相对于点 A 的矢径为 r_C , J_A , J_C 为刚体的转动惯量, 其转轴分别过 A , C 两点且与图形垂直, 则刚体对点 A 的动量矩为

A $L_A = J_A\omega$ B $L_A = r_C \times Mv_C$
 C $L_A = J_A\omega + r_C \times Mv_C$
 D $L_A = J_C\omega + r_C \times Mv_C$

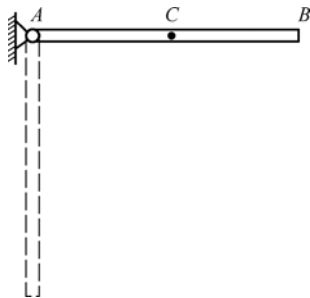


思考题图 5-7

5-8 均质杆 AB , 长为 l , 重为 P , A 端以光滑铰链固定, 可使杆 AB 绕点 A 在铅直平面内转动, 如思考题图 5-8 所示, 图中点 C 是杆的质心。当杆 AB 由水平位置无初速地摆到铅直位置时, 其动能为 T , 试判断下述计算方法是否正确:

(1) $T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2$;
 (2) $T = \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 = \frac{P}{6g} l^2 \omega^2$;

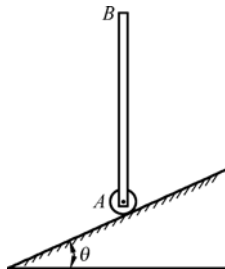
(3) $T = \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 = \frac{P}{24g} l^2 \omega^2$;
 (4) $T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{P}{6g} l^2 \omega^2$;
 (5) $T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 = \frac{7P}{24g} l^2 \omega^2$ 。



思考题图 5-8

5-9 在思考题图 5-9 中, 均质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 其 A 端与一个不计重量的滑轮光滑铰接, 滑轮置于斜面上。不计摩擦, 将杆 AB 于图示铅直位置无初速释放。试判断下述各说法的正误:

- (1) AB 杆将做平动;
- (2) AB 杆将发生摆动 (平动加转动);
- (3) AB 杆的质心加速度是常量;
- (4) AB 杆摆至一定角度后将不再摆动, 而仅做平动, 且 B 端不接触斜面。



思考题图 5-9

5-10 试选出下列正确的说法。

- (1) 质点系的动能是各质点动能的算术和;
- (2) 忽略机械能和其他能量之间的转换, 则只要有力对其做功, 物体的动能就会增加;
- (3) 平面运动刚体的动能可由其质量及质心速度完全确定;
- (4) 内力不能改变质点系的动能。

5-11 在下列哪些系统中机械能守恒。

- (1) 约束皆为理想约束的系统；
- (2) 只有有势力做功的系统；

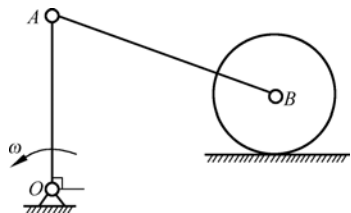
(3) 内力不做功的系统；

(4) 机械能不能转化为其他能量的系统。

习 题

基本题

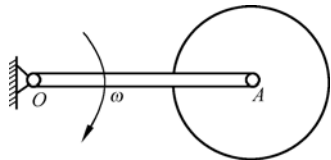
5-1 在习题图 5-1 所示系统中,均质杆 OA 、 AB 与均质轮的质量均为 m , 杆 OA 的长度为 l_1 , 杆 AB 的长度为 l_2 , 轮的半径为 R , 轮沿水平面做纯滚动。在图示瞬时, 杆 OA 的角速度为 ω , 求整个系统的动量。



习题图 5-1

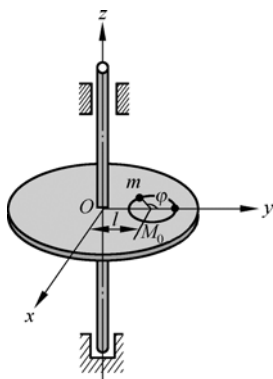
5-2 如习题图 5-2 所示, 均质圆盘半径为 R , 质量为 m , 不计质量的细杆长 l , 绕轴 O 转动, 角速度为 ω , 求下列三种情况下圆盘对固定轴 O 的动量矩。

- (a) 圆盘固连于杆；
- (b) 圆盘绕轴 A 转动, 相对于杆 OA 的角速度为 $-\omega$ ；
- (c) 圆盘绕轴 A 转动, 相对于杆 OA 的角速度为 ω 。



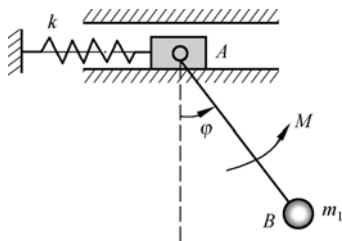
习题图 5-2

5-3 如习题图 5-3 所示, 水平圆盘可绕铅直轴 z 转动, 其对轴 z 的转动惯量为 J_z 。一个质量为 m 的质点, 在圆盘上做匀速圆周运动, 质点的速度为 v_0 , 圆的半径为 r , 圆心到盘中心的距离为 l 。开始运动时, 质点在位置 M_0 , 圆盘角速度为零。求圆盘角速度 ω 与角 φ 之间的关系, 轴承摩擦忽略不计。



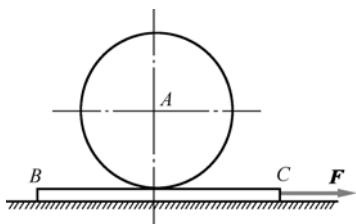
习题图 5-3

5-4 如习题图 5-4 所示, 质量为 m 的滑块 A , 可以在水平光滑槽中运动, 具有刚性系数为 k 的弹簧一端与滑块相连接, 另一端固定。杆 AB 长度为 l , 质量忽略不计, A 端与滑块铰接, B 端装有质量 m_1 , 在铅直平面内可绕点 A 旋转。设在力偶 M 作用下转动角速度 ω 为常数。求滑块 A 的运动微分方程。



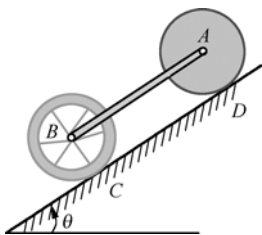
习题图 5-4

5-5 如习题图 5-5 所示, 质量为 m 、半径为 R 的均质圆盘, 置于质量为 M 的平板上, 沿平板加一个常力 F 。设平板与地面间摩擦系数为 f , 平板与圆盘间的接触是足够粗糙的, 求圆盘中心点 A 的加速度。



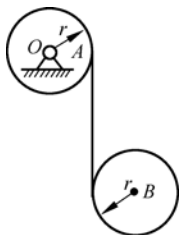
习题图 5-5

- 5-6 如习题图 5-6 所示, 均质实心圆柱体 A 和薄铁环 B 的质量均为 m , 半径都等于 r , 两者用杆 AB 铰接, 无滑动地沿斜面滚下, 斜面与水平面的夹角为 θ 。如杆的质量忽略不计, 求杆 AB 的加速度和杆的内力。



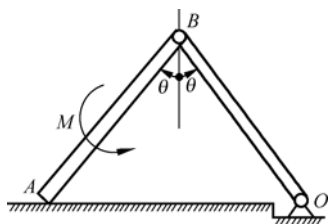
习题图 5-6

- 5-7 如习题图 5-7 所示, 均质圆柱体 A 和 B 的质量均为 m , 半径为 r , 一根绳缠在绕固定轴 O 转动的圆柱 A 上, 绳的另一端绕在圆柱 B 上。摩擦忽略不计。求: (1) 圆柱体 B 下落时质心的加速度; (2) 若在圆柱体 A 上作用一个逆时针转向、矩为 M 的力偶, 试问在什么条件下圆柱体 B 的质心加速度将向上。



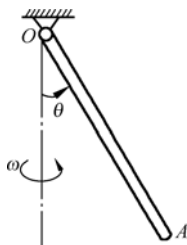
习题图 5-7

- 5-8 平面机构由两个匀质杆 AB, BO 组成, 两杆的质量均为 m , 长度均为 l , 在铅垂平面内运动。在杆 AB 上作用一个不变的力偶矩 M , 从如习题图 5-8 所示的位置由静止开始运动。不计摩擦, 试求当 A 即将碰到铰支座 O 时 A 端的速度。



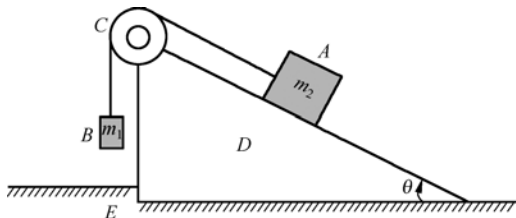
习题图 5-8

- 5-9 如习题图 5-9 所示, 长为 l 、质量为 m 的均质杆 OA 以球铰链 O 固定, 并以等角速度 ω 绕铅直线转动, 如杆与铅直线的夹角为 θ , 求杆的动能。



习题图 5-9

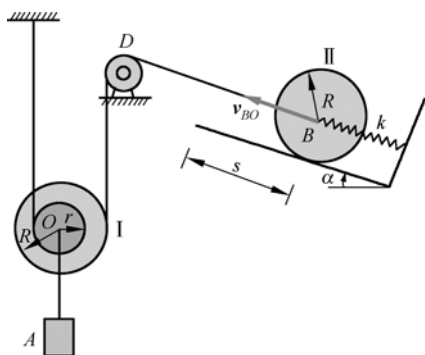
- 5-10 如习题图 5-10 所示, 物体 A 质量为 m_1 , 沿楔状物 D 的斜面下降, 同时借绕过滑轮 C 的绳使质量为 m_2 的物体 B 上升。斜面与水平成 θ 角, 滑轮和绳的质量及一切摩擦均略去不计。求楔状物 D 作用于地板凸出部分 E 的水平压力。



习题图 5-10

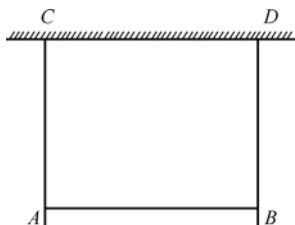
- 5-11 如习题图 5-11 所示, 鼓轮 I 重为 $W = 500 \text{ N}$, 对轮心点 O 的回转半径为 $\rho = 0.2 \text{ m}$, 物块 A 重为 $Q = 300 \text{ N}$, 均质圆轮 II 半径为 R , 重为 $P = 400 \text{ N}$, 在倾角为 α 的斜面上只滚动不滑动, 其中 $r = 0.1 \text{ m}$, $R = 0.2 \text{ m}$, 弹簧刚度系数为 k , 绳索不可伸长, 定滑轮 D 质量不计。在系统处于静止平衡时, 给轮心 B 以初速度

v_{B0} , 求轮沿斜面向上滚过距离 s 时, 轮心的速度 v_B 。



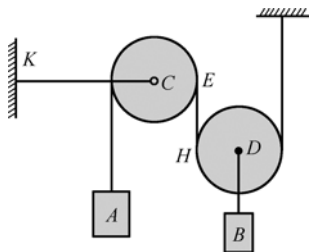
习题图 5-11

- 5-12 如习题图 5-12 所示, 均质棒 AB 的质量为 $m = 4 \text{ kg}$, 其两端悬挂在两条平行绳上, 棒处在水平位置。设其中一根绳突然断开, 试用刚体平面运动方程求此瞬时另一根绳的张力 F 。



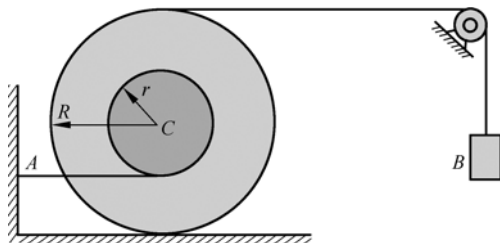
习题图 5-12

- 5-13 在习题图 5-13 所示的机构中, 物块 A, B 的质量均为 m , 两个均质圆轮 C, D 的质量均为 $2m$, 半径均为 R 。 C 轮铰接于无重悬臂梁 CK 上, D 为动滑轮, 梁的长度为 $3R$, 绳与轮间无滑动。系统由静止开始运动, 求: (1) A 物块上升的加速度; (2) HE 段绳的拉力; (3) 固定端 K 处的约束力。



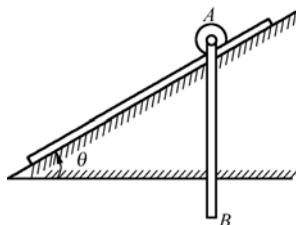
习题图 5-13

- 5-14 如习题图 5-14 所示, 鼓轮重 1200 N , 置于水平面上, 外半径 $R = 90 \text{ cm}$, 轮轴半径 $r = 60 \text{ cm}$, 对质心轴 C 的回转半径 $\rho = 60 \text{ cm}$ 。缠绕在轮轴上的软绳水平地连于固定点 A , 缠在外轮上的软绳水平地跨过质量不计的定滑轮, 吊一个重为 $P = 400 \text{ N}$ 的重物 B , 鼓轮与水平面之间的动摩擦系数为 0.4 , 求轮心 C 的加速度。



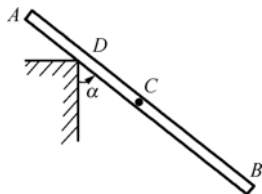
习题图 5-14

- 5-15 如习题图 5-15 所示, 匀质细长杆 AB , 质量为 m , 长度为 l , 在铅垂位置由静止释放, 借 A 端的滑轮沿倾斜角为 θ 的轨道滑下。不计摩擦和滑轮的质量, 试求刚释放时点 A 的加速度。



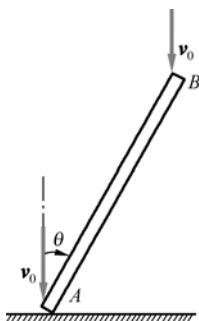
习题图 5-15

- 5-16 匀质细长杆 AB , 质量为 m , 长为 l , $CD = d$, 与铅垂墙间的夹角为 α , D 棱是光滑的。在习题图 5-16 所示位置将杆突然释放, 试求刚释放时, 质心 C 的加速度和 D 处的约束力。



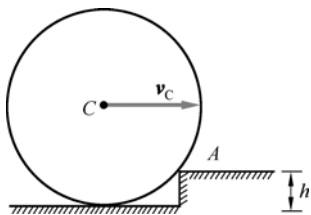
习题图 5-16

- 5-17 如习题图 5-17 所示, 匀质杆 AB , 质量为 m , 长为 L , 两端均以速度 v_0 下落, 且这时杆与铅垂线的夹角为 θ 。假设碰撞以后杆将绕点 A 做定轴转动。试求: (1) 碰撞前后的能量损失; (2) 点 B 与水平面即将接触时的速度。



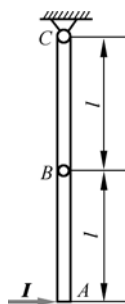
习题图 5-17

- 5-18 如习题图 5-18 所示, 匀质圆柱体的质量 $m = 10 \text{ kg}$, 半径 $r = 30 \text{ cm}$, 当沿水平轨道以匀速 $v_0 = 2 \text{ m/s}$ 做纯滚动时, 碰到高 $h = 6 \text{ cm}$ 的障碍。设恢复系数 $e = 0$, A 处有足够的摩擦力, 试求: (1) 碰撞结束时圆柱体的角速度; (2) 使圆柱能超过障碍的 v_0 的大小; (3) 碰撞时动能的损失; (4) 碰撞冲量的水平及竖直分量。



习题图 5-18

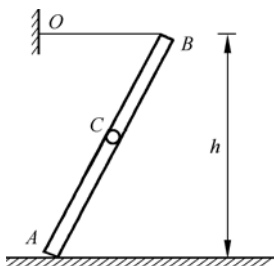
- 5-19 如习题图 5-19 所示, 两根相同的均质直杆在 B 处铰接并铅垂静止地悬挂在铰链 C 处。设每根杆长 $l = 1.2 \text{ m}$, 质量 $m = 4 \text{ kg}$ 。在下端 A 处作用一个冲量为 $I = 14 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的水平碰撞力, 求碰撞后杆 BC 的角速度。



习题图 5-19

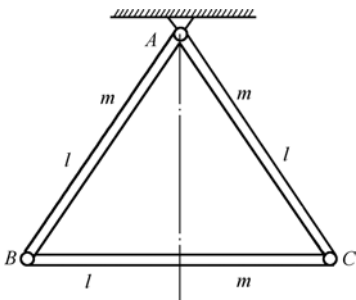
提高题

- 5-20 如习题图 5-20 所示, 已知均质杆 AB 长 $l = 2.5 \text{ m}$, 质量 $M = 50 \text{ kg}$, 绳长 1 m , 高 $h = 2 \text{ m}$ 。当绳子处于水平位置时, 杆 AB 由静止开始落下, 不计杆与地面间的摩擦, 试求开始运动的瞬时: (1) 杆 AB 的角加速度; (2) 绳子 BO 的拉力; (3) 点 A 的约束力。



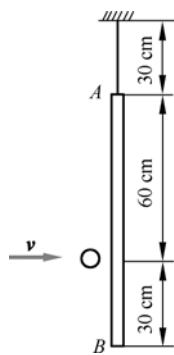
习题图 5-20

- 5-21 三根匀质细杆 AB, BC, CA 的长均为 l , 质量均为 m , 铰接成一个等边三角形, 在铅垂平面内悬挂在固定铰接支座 A 上。在习题图 5-21 所示瞬时 C 处的铰链销钉突然脱落, 系统由静止进入运动, 试求在销钉脱落的瞬时, 三根杆的角加速度 α_{AC}, α_{BC} 和 α_{AB} 。



习题图 5-21

- 5-22 如习题图 5-22 所示, 一个质量为 0.2 kg 的垒球以水平方向的速度 $v = 48\text{ km/h}$ 打在一个质量为 2.4 kg 的匀质木棒上, 木棒的一端用细绳悬挂于天花板上。若恢复系数为 0.5 , 求碰撞后棒两端 A, B 的速度。



习题图 5-22

第 6 章

达朗贝尔原理

本章将介绍的达朗贝尔原理提供了研究动力学问题的一种新的普适方法，即用静力学中研究平衡问题的方法求解动力学问题，因此该方法也称为动静法。

6.1 质点的达朗贝尔原理

假设作用在非自由质点上的主动力为 \mathbf{F} ，约束力为 \mathbf{F}_N ，由牛顿第二运动定律可得

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_N$$

将上式写成如下形式：

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N - m\mathbf{a} = 0$$

并引入记号

$$\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}$$

则有

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_I = 0 \quad (6-1)$$

式中，矢量 \mathbf{F}_I 具有力的量纲，称为质点的惯性力（inertial force），即惯性力的大小等于质点的质量与其加速度的乘积，方向与加速度的方向相反。

引进惯性力的概念之后，式(6-1)所表示的关系可表述为：在质点运动的每一瞬时，如果在质点上加上惯性力，则作用于质点的主动力、约束力与惯性力构成平衡力系。这就是质点的达朗贝尔原理（d'Alembert principle），如图 6-1 所示。

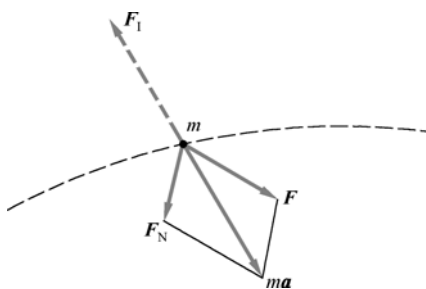


图 6-1 质点的达朗贝尔原理

达朗贝尔原理在直角坐标系中的投影形式为

$$\begin{cases} F_x + F_{Nx} + F_{Ix} = 0 \\ F_y + F_{Ny} + F_{Iy} = 0 \\ F_z + F_{Nz} + F_{Iz} = 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

应用上述方程时，除了要分析主动力、约束力外，还必须分析惯性力，并将惯性力假想地

加在质点上。其余过程与静力学完全相同。求解惯性力 F_I 就是求解运动；求解 F_N 就是求解未知的约束力（包括动约束力）。在已知运动求约束力的问题中，利用达朗贝尔原理往往十分方便。由于这种方法容易掌握，在许多情况下使用方便，所以应用广泛。

应注意质点实际上是加速运动着的，并非真正处于平衡状态。这里所说的“平衡”只是就方程(6-1)的数学形式来说的。这样就能根据静力学的平衡理论来求解动力学问题了。[当然，如果在随物体运动的非惯性系（以与物体相同的速度、加速度运动的参考系）中观察，并将参考系的加速度与引力场等效，也可以理解为质点处于平衡状态。但相关的内容已经超出了经典牛顿力学的范畴。]

例题 6-1

如例题图 6-1 所示，单摆摆长为 l ，摆锤质量为 m ，求单摆的运动规律及绳的约束力。

分析：摆锤做圆周运动，具有法向和切向加速度。利用质点的达朗贝尔原理在运动着的质点上加上假想的惯性力，则质点所受的力在形式上构成平衡力系，因而可将动力学问题转化成静力学问题。

解：

(1) 研究摆锤。分析受力：受到绳的拉力 F_T 和重力 P ；分析运动：加速度为 a ，其中 $a^r = l\ddot{\theta}$ ， $a^n = l\dot{\theta}^2$ 。

(2) 加惯性力 $F_I = -ma$ ， $F_I^r = ml\ddot{\theta}$ ， $F_I^n = ml\dot{\theta}^2$ ，指向如习题图 6-1 所示。

(3) 用达朗贝尔原理建立平衡方程为

$$\sum F_r = 0, \quad -F_I^r - mg \sin \theta = 0$$

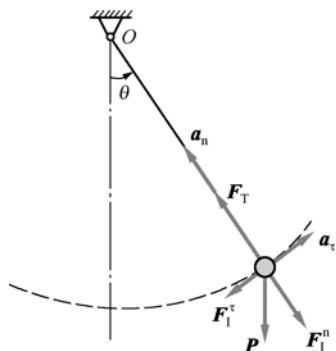
将 $F_I^r = ml\ddot{\theta}$ 代入，得

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (\text{运动微分方程})$$

$$\sum F_n = 0, \quad F_T - F_I^n - mg \cos \theta = 0$$

将 $F_I^n = ml\dot{\theta}^2$ 代入，得

$$F_T = mg \cos \theta + ml\dot{\theta}^2$$



例题图 6-1

讨论：

上式表明，绳的约束力 F_T 包含两部分：静约束力 $mg \cos \theta$ 及动约束力 $ml\dot{\theta}^2$ ，后者是由离心惯性力引起的。因此，利用达朗贝尔原理，可以方便地解释动约束力。

6.2 质点系的达朗贝尔原理

考察由 n 个质点组成的非自由质点系，对每个质点都施加惯性力，则 n 个质点上所受的全部主动力、约束力和假想的惯性力形成空间一般力系。对于每个质点，达朗贝尔原理均成立，

即认为作用在质点上的主动力、约束力和惯性力组成形式上的平衡力系。于是, 由 n 个质点组成的质点系上的主动力、约束力和惯性力, 也组成形式上的平衡力系。将作用在每个质点的力分为外力 $\mathbf{F}_i^{(e)}$ 与内力 $\mathbf{F}_i^{(i)}$, 根据质点的达朗贝尔原理有

$$\mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)} + \mathbf{F}_{li} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

对整个质点系来说, 有

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum \mathbf{F}_{li} = 0 \\ \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(i)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{li}) = 0 \end{cases}$$

由于内力以作用力和反作用力成对出现, 所以其和为零, 不出现在平衡方程式中, 于是有

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum \mathbf{F}_{li} = 0 \\ \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{li}) = 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

因此, 在质点系中的每一个质点上加上相应的惯性力, 则作用于质点系的所有主动力、约束力与所有质点的惯性力平衡。这就是质点系的达朗贝尔原理。

一般说来, 作用于质点系的主动力、约束力与加上的惯性力将构成一个平面的或空间的任意力系。实际应用时, 与在静力学中的一样, 仍然可用力投影方程和力矩方程, 并可选取不同的考察对象来建立平衡方程求解。

例题 6-2

长为 l 、重为 P 的均质细长杆, 以等角速度 ω 绕固定铰 (球铰) 转动, 形成一个锥摆。试计算杆偏离铅垂线的角度 φ 及铰 O 的约束力。

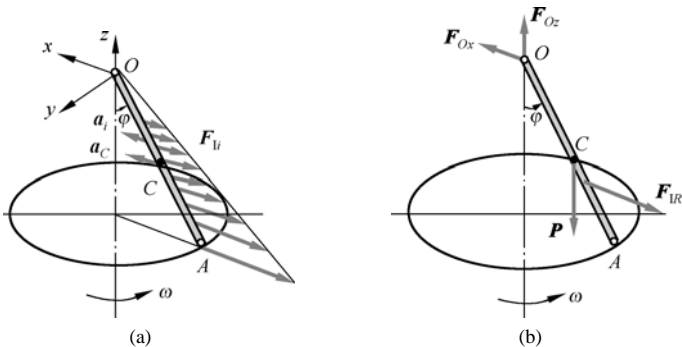
分析: 对由质点系组成的均质细长杆, 应首先施加惯性力, 并将分布的惯性力简化, 然后利用平衡方程求解。

解:

(1) 惯性力的简化。以杆 OA 为研究对象, 杆处于稳定的运动状态, 杆上各点做等速圆周运动, 各点加速度指向转动轴 z , 大小为 $a_i = x_i \omega^2 \sin \varphi$, 沿杆呈线性分布。杆 OA 上任意一点的惯性力为 $\mathbf{F}_{li} = -m_i \mathbf{a}_i$, 方向与加速度方向相反。代入加速度后, 可得大小为

$$F_{li} = m_i x_i \omega^2 \sin \varphi$$

质点系的惯性力呈三角形分布, 如例题图 6-2(a)所示。简化结果为一个合力, 如例题图 6-2(b)所示。



例题图 6-2

根据静力学中分布力系简化的方法, 可得惯性力合力的大小为

$$F_{\text{IR}} = -ma_C$$

所以

$$F_{\text{IR}} = \frac{P}{g} \cdot \frac{l}{2} \omega^2 \sin \varphi$$

式中, 惯性力合力的作用点距点 O 为 $2l/3$ 。

(2) 约束力的求解。

杆 OA 的受力图如例题图 6-2b 所示, 其中 F_{Ox}, F_{Oy} 为铰 O 的约束力。平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} - F_{\text{IR}} = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - P = 0 \quad (\text{b})$$

$$\sum m_O(F) = 0, \quad -P \frac{l}{2} \sin \varphi + \frac{P}{g} \cdot \frac{l}{2} \omega^2 \frac{2}{3} l \cos \varphi \sin \varphi = 0 \quad (\text{c})$$

由式(c)得

$$\left(\frac{2}{3g} l \omega^2 \cos \varphi - 1 \right) \sin \varphi = 0$$

其解为

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2} \left(\omega > \omega_K = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \right)$$

进一步分析表明: 当 $\omega < \omega_K$ 时, φ_1 为稳定解; 当 $\omega > \omega_K$ 时, φ_3 为稳定解。由式(a)和式(b)得铰的约束力为

$$F_{Ox} = \frac{P}{g} \cdot \frac{l}{2} \omega^2 \sin \varphi, \quad F_{Oy} = P$$

讨论:

(1) 本例题惯性力系为简单的三角形分布, 可直接求出其合力, 合力作用点在距点 O 为 $2l/3$ 处。但惯性力合力的大小及作用点也可按下列积分式求得

$$F_{\text{IR}} = \int_0^l \frac{P}{gl} x' \omega^2 \sin \varphi dx' = \frac{1}{2} \frac{P}{g} l \omega^2 \sin \varphi$$

设合力作用点距点 O 为 l' , 由合力矩定理得

$$F_{\text{IR}} l' \cos \varphi = \int_0^l \frac{P}{gl} x'^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi dx'$$

故

$$l' = \frac{2}{3} l$$

注意: 惯性力合力并不作用于质心。上述积分方法可用于任意分布惯性力的情况。

(2) 惯性力可向任意一点简化, 例如在本例题中可向点 O 简化, 得到一个力和一个力偶。因为主矢不随简化中心而改变, 所以力的大小仍为

$$F_{\text{IR}} = ma_C = \frac{1}{2} \frac{P}{g} l \omega^2 \sin \varphi$$

方向仍与质心加速度方向相反。惯性力偶矩的大小则为

$$M_{\text{IO}} = F_{\text{IR}} \frac{2}{3} l \cos \varphi = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

也可由积分式

$$M_{\text{IO}} = \int_0^l \frac{P}{gl} x'^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi dx' = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

求得。

6.3 刚体惯性力系的简化

在用达朗贝尔原理研究刚体的运动时，必须对刚体内每一个质点加上惯性力，因而惯性力是体积力，惯性力系是分布力系。为了便于应用，必须研究其简化问题。

如图 6-2 所示，质点系中任意质点 M_i 的加速度为 \mathbf{a}_i 。若以固定点 O 为简化中心，则惯性力系向简化中心 O 简化的主矢为

$$\mathbf{F}_{\text{IR}} = \sum \mathbf{F}_{\text{Ii}} = \sum (-m_i \mathbf{a}_i) = -m \mathbf{a}_C$$

主矩为

$$\mathbf{M}_{\text{IO}} = \sum \mathbf{r}_i \times (-m_i \mathbf{a}_i) = -\frac{d}{dt} \left(\sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right) = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$$

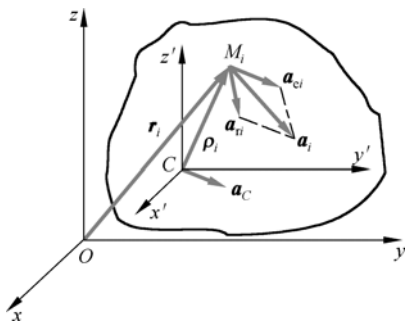


图 6-2 刚体惯性力系的简化

若以刚体质心 C 为简化中心，则惯性力系简化的主矢不变，仍然为

$$\mathbf{F}_{\text{IR}} = -m \mathbf{a}_C$$

但主矩将有所不同。过 C 建立平动坐标系，将刚体运动分解为平动和转动，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{IC}} &= \sum \boldsymbol{\rho}_i \times (-m_i \mathbf{a}_i) = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times [-m_i (\mathbf{a}_{ei} + \mathbf{a}_{ri})] \\ &= -\sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{a}_C - \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{a}_{ri} = -\left(\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) \times \mathbf{a}_C - \frac{d}{dt} \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_{ri} = -\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \end{aligned}$$

上式中 $\boldsymbol{\rho}_i$ 为由质心引出的矢径，因此有 $\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = m \boldsymbol{\rho}_C = 0$ ； \mathbf{L}_C 为刚体相对质心的动量矩。

下面讨论特殊的质点系——刚体分别做平动、绕定轴转动和做平面运动时惯性力系的简化。

刚体平动的惯性力系简化

如图 6-3 所示, 质量为 m 的刚体做平动, 其上各点在同一瞬时具有相同的加速度, 都等于质心的加速度 \boldsymbol{a}_C , 于是对于质量为 m_i 的任意质点 M_i , 其惯性力为

$$\boldsymbol{F}_{li} = -m_i \boldsymbol{a}_i = -m_i \boldsymbol{a}_C$$

可见, 刚体上各质点的惯性力组成平行力系, 力系中各力的大小与质点各自的质量成正比。因为

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = 0, \quad \sum m_i = m$$

所以, 将惯性力系向刚体的质心简化, 可得惯性力系的主矢和主矩分别为

$$\boldsymbol{F}_{IR} = \sum \boldsymbol{F}_{li} = \sum (-m_i \boldsymbol{a}_C) = -m \boldsymbol{a}_C \quad (6-4)$$

$$\boldsymbol{M}_{IC} = \sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_{li}) = \sum \boldsymbol{r}_i \times (-m_i \boldsymbol{a}_C) = -\left(\sum m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{a}_C = 0 \quad (6-5)$$

上述结果表明, 在任意一个瞬时, 平移刚体惯性力系均可简化为一个通过质心的合力, 合力的大小等于刚体的质量与加速度的乘积, 方向与加速度方向相反。

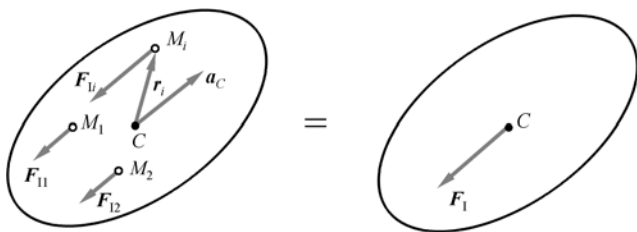


图 6-3 刚体平动的惯性力系简化

刚体绕定轴转动的惯性力系简化

如图 6-4(a)所示, 刚体绕定轴 z 转动, 角速度为 ω , 角加速度为 α , 刚体的质量为 m 。下面讨论将惯性力系向轴 z 上任意一点 O 简化的结果。

考察刚体内任意一个质量为 m_i 、距点 O 为 \boldsymbol{r}_i 处的质点, 其切向和法向加速度分别为

$$\boldsymbol{a}_{it} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{a}_{in} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

则质点的切向和法向惯性力分别为

$$\boldsymbol{F}_{li}^t = -m_i \boldsymbol{a}_{it}, \quad \boldsymbol{F}_{li}^n = -m_i \boldsymbol{a}_{in}$$

于是, 上述惯性力系对点 O 的主矩为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{IO} &= \sum \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_{li}^t + \boldsymbol{F}_{li}^n) = -\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i [\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= -\sum m_i [(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{r}_i] - \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{r}_i] \\ &= -\sum m_i [(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{r}_i] - \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i) \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

上述推导时利用了矢量运算性质: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c}$ 。考虑到 $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_i = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, 因而得

$$\mathbf{M}_{IO} = \sum m_i (xzi + yzj) \alpha - \sum m_i (yzi - xzj - z^2 k) \omega^2$$

其中若记 $J_z = \sum m_i z^2$ ，称为刚体对轴 z 的转动惯量；记 $J_{xz} = J_{zx} = \sum m_i xz$ 和 $J_{yz} = J_{zy} = \sum m_i yz$ ，称为刚体对轴 z 的惯性积，则有

$$\mathbf{M}_{IO} = (J_{xz}\alpha - J_{yz}\omega^2)\mathbf{i} + (J_{yz}\alpha + J_{xz}\omega^2)\mathbf{j} - J_z\alpha\mathbf{k} \quad M_{I_x}\mathbf{i} + M_{I_y}\mathbf{j} + M_{I_z}\mathbf{k} \quad (6-6)$$

当刚体具有垂直于转轴的质量对称面时，则有 $J_{xz} = J_{yz} = 0$ 。于是，惯性力系简化的主矩为

$$\mathbf{M}_{IO} = M_{I_z}\mathbf{k} = -J_z\alpha\mathbf{k} \quad (6-7)$$

另外，还可以得到惯性力系简化的主矢 $\mathbf{F}_{IR} = -m\mathbf{a}_C$ 。可见，当刚体绕定轴转动时，若具有垂直于转轴的质量对称面，则其惯性力系向轴心简化的结果为一个主矢和一个主矩。主矢的大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，其方向与质心加速度方向相反。主矩的大小等于刚体对转轴的转动惯量与刚体角加速度的乘积，其方向与角加速度的方向相反。

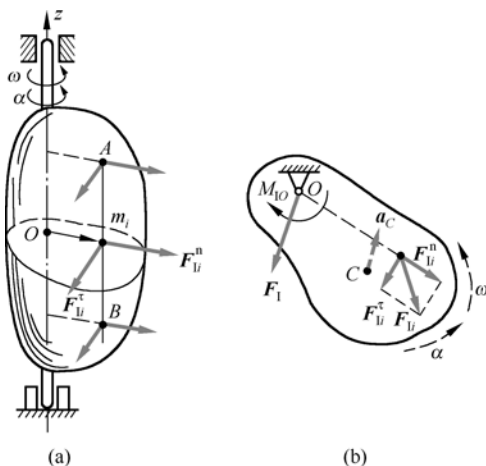


图 6-4 刚体绕定轴转动的惯性力系简化

刚体平面运动的惯性力系简化

考虑刚体具有质量对称面，并平行于此对称面运动的情况。如图6-5所示的质量对称面，以质心 C 为基点，刚体的平面运动可分解为跟随质心的平动和相对于质心的转动。

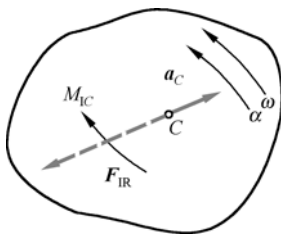


图 6-5 刚体平面运动的惯性力系简化

将惯性力系向质心 C 简化，平移部分与前面刚体做平移的情形相同，简化结果为一个通过质心 C 的力 \mathbf{F}_I ，相当于惯性力系的主矢；转动部分简化结果为一个力偶矩等于 M_{IC} 的惯性力偶，相当于惯性力系对质心 C 的主矩。

设质量为 m 的刚体，质心 C 的加速度为 \mathbf{a}_C ，角加速度为 α ，对通过质心 C 且垂直于对称平面轴的转动惯量为 J_C ，选质心为简化中心，则简化结果为一个惯性力主矢和一个惯性力主矩，其中惯性力主矢为

$$\mathbf{F}_{IR} = -m\mathbf{a}_C \quad (6-8)$$

惯性力主矩的大小为

$$M_{IC} = J_C \alpha \quad (6-9)$$

方向与角加速度的方向相反。

例题 6-3

如例题图6-3所示，均质圆盘半径为 r ，质量为 m ，在重力作用下沿倾角为 θ 的斜面向下做纯滚动，求圆盘下降的加速度及斜面的摩擦力。

分析：圆盘沿倾角为 θ 的斜面向下纯滚动时做平面运动，其惯性力系向质心简化的结果为一个主矢和一个主矩。

解：

(1) 研究圆盘。分析受力：有重力 \mathbf{P} 、斜面的支持力 \mathbf{F}_N 和摩擦力 \mathbf{F}_s ；分析运动：质心加速度为 \ddot{x} ，角加速度 $\alpha = \frac{\ddot{x}}{r}$ 。

(2) 加惯性力。主矢和主矩分别与加速度和角加速度方向相反，大小分别为

$$F_I = m\ddot{x}, \quad M_I = J_C \alpha = \frac{1}{2}mr\ddot{x}$$

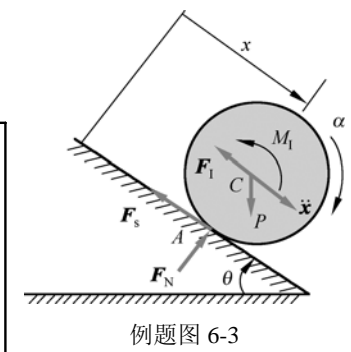
(3) 利用达朗贝尔原理建立平衡方程，并求解得

$$\sum M_A = 0, \quad F_I r + M_I - mgr \sin \theta = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad (\text{圆盘下降的加速度})$$

$$\sum F_x = 0, \quad mg \sin \theta - F_I - F_s = 0, \quad F_s = \frac{1}{3}mg \sin \theta \quad (\text{斜面的摩擦力})$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - mg \cos \theta = 0, \quad F_N = mg \cos \theta$$



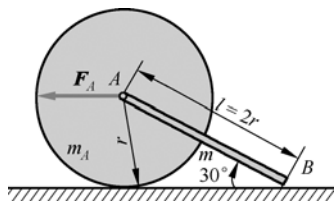
例题图 6-3

例题 6-4

如例题图 6-4(a)所示，均质圆轮质量为 m_A ，半径为 r ；细长杆长 $l = 2r$ ，质量为 m ；杆端点 A 与轮心光滑铰接。若在 A 处加一个水平拉力 \mathbf{F} ，使圆轮沿水平面做纯滚动，试分析：

(1) 施加多大的力 \mathbf{F} 才能使杆的 B 端刚刚离开地面？

(2) 为了保证圆盘做纯滚动，轮与地面间的静滑动摩擦系数应为多大？



例题图 6-4(a)

分析：当使杆的 B 端刚刚离开地面时，均质圆轮做平面运动，其惯性力系向质心简化的结果为一个主矢和一个主矩；杆 AB 做平动，其惯性力系的简化结果为一个主矢。

解：

(1) 先确定圆轮与地面之间的摩擦系数。

细杆 B 端刚刚离开地面的瞬时，仍为平行移动，地面 B 处的约束力为零，设这时杆的加速度为 a 。杆承受的力及惯性力如例题图 6-4(c)所示，其中

$$F_{IC} = ma$$

由平衡方程

$$\sum M_A(F) = 0, \quad F_{IC}r \sin 30^\circ - mgr \cos 30^\circ = 0$$

解得

$$a = \sqrt{3}g$$

整个系统承受的力及惯性力如例题图 6-4(b)所示，其中

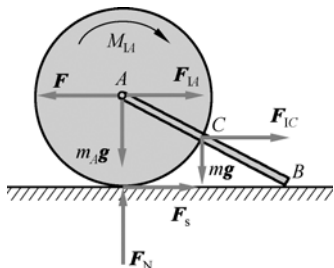
$$F_{IA} = m_A a, \quad M_{IA} = \frac{1}{2} m_A r^2 \frac{a}{r} = \frac{1}{2} m_A a r$$

由平衡方程

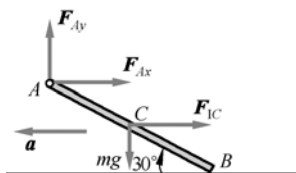
$$\sum F_y = 0, \quad F_N - (m_A + m)g = 0$$

解得地面的摩擦力为

$$F_s \leq f_s F_N = f_s (m_A + m)g$$



例题图 6-4(b)



例题图 6-4(c)

再以圆轮为研究对象，由平衡方程

$$\sum M_A(F) = 0, \quad F_s r - M_{IA} = 0$$

解得

$$F_s = \frac{1}{2} m_A a = \frac{\sqrt{3}}{2} m_A g$$

据此，可求得地面的摩擦系数为

$$f_s = \frac{F_s}{F_N} = \frac{\sqrt{3} m_A}{2(m_A + m)}$$

(2) 再确定水平力的大小。

以整个系统为研究对象, 根据例题图 6-4(a)建立平衡方程

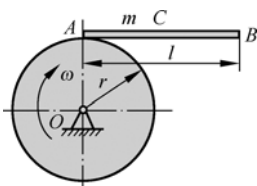
$$\sum F_x = 0, \quad F - F_{IA} - F_{IC} - F_s = 0$$

解得水平力为

$$F = \left(\frac{3m_A}{2} + m \right) \sqrt{3}g$$

例题 6-5

如例题图 6-5(a)所示的结构位于水平面内, 长为 l , 质量为 m 的均质杆 AB 的一端焊接于半径为 r 的圆盘边缘上。若已知图示瞬时圆盘的角速度 $\omega = 0$, 角加速度为 α 。求焊缝 A 处的附加动约束力。



例题图 6-5(a)

分析: 本题是已知运动求约束力的问题。杆 AB 以 O 为轴做定轴转动, 其惯性力可以向其质心 C 简化, 也可以向固定轴 O 简化。

解:

质心 C 的加速度方向如例题图 6-5(b)所示, 大小为

$$a_C = \frac{r}{\cos \varphi} \alpha$$

式中

$$\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}, \quad \sin \varphi = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}$$

将杆 AB 的惯性力向固定轴 O 简化, 结果为一个力和一个力偶, 其中力的大小为

$$F_{IR} = ma_C = m \frac{r}{\cos \varphi} \alpha$$

方向与 a_C 方向相反; 力偶矩的大小为

$$M_{IO} = J_O \alpha = \left[\frac{1}{12} ml^2 + m \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right) \right] \alpha$$

方向与 α 的方向相反。

杆 AB 受到的主动力、约束力和惯性力如例题图 6-5c 所示。根据达朗贝尔原理列平衡方程, 可得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{IR} \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{IR} \sin \varphi = 0$$

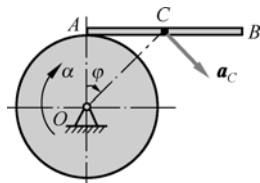
$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A + M_{IO} - F_{IR} r \cos \varphi = 0$$

解得

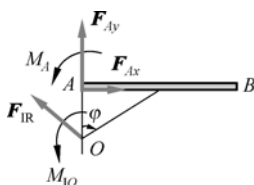
$$F_{Ax} = F_{IR} \cos \alpha = mr\alpha$$

$$F_{Ay} = -F_{IR} \sin \alpha = -\frac{1}{2}ml\alpha$$

$$M_A = -M_{IO} + F_{IR} r \cos \alpha = -\frac{1}{3}ml^2\alpha$$



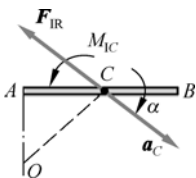
例题图 6-5(b)



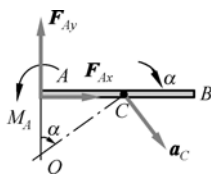
例题图 6-5(c)

讨论:

也可视杆 AB 做平面运动, 将惯性力向质心 C 简化, 结果为一个力和一个力偶, 如例题图 6-5(d)所示。其中, 力的大小与方向仍由惯性力的主矢 $F_{IR} = -ma_C$ 决定; 惯性力偶矩的大小与方向由惯性力对点 C 的主矩决定, 大小为 $M_{IC} = J_C\alpha = ml^2\alpha/12$, 方向与角加速度 α 方向相反, 受力如例题图 6-5(e)所示。根据平衡方程可求得解答。



例题图 6-5(d)



例题图 6-5(e)

例题 6-6

长均为 l , 质量均为 m 的均质杆 OA 和 AB 铰接于 A , 在例题图 6-6(a)所示的水平位置由静止释放, 求初始瞬时杆 OA 和 AB 的角加速度。

分析: 分析杆 OA 和 AB 的运动可知, 杆 OA 做定轴转动, 可将其惯性力向点 O 简化; 杆 AB 做平面运动, 其惯性力可以向其质心 C_2 简化。

解:

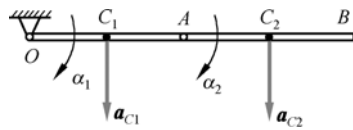
(1) 设初始瞬时杆 OA 和杆 AB 的角加速度分别为 α_1 和 α_2 , 则杆 OA 的质心 C_1 的加速度大小为 $a_{C_1} = l\alpha_1/2$ 。由运动学关系知, 杆 AB 质心 C_2 的加速度为

$$a_{C_2} = a_A + a_r^n + a_r^t$$

所以

$$a_{C_2} = l\alpha_1 + \frac{1}{2}l\alpha_2$$

方向如例题图 6-6(a)所示。



例题图 6-6(a)

(2) 杆 OA 和 AB 惯性力的简化。如例题图 6-6(b)所示, 将杆 OA 的惯性力向点 O 简化, 得

$$F_{IR1} = ma_{C_1} = m \frac{1}{2} l \alpha_1, \quad M_{I1} = \frac{1}{3} m l^2 \alpha_1 \quad (a)$$

将杆 AB 的惯性力向其质心 C_2 简化, 得

$$F_{IR2} = ma_{C_2} = m \left(l \alpha_1 + \frac{l}{2} \alpha_2 \right), \quad M_{I2} = \frac{1}{12} m l^2 \alpha_2 \quad (b)$$

(3) 加惯性力后, 得到刚体系平衡问题, 未知量较多。若只求运动, 即只求惯性力, 可以灵活选取力矩方程的矩心, 避免未知约束力的出现, 使求解简捷。

考虑系统整体平衡, 受力如例题图 6-6(b)所示, 得

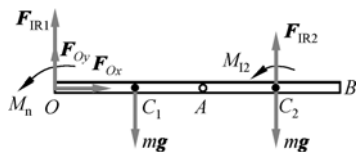
$$\sum M_O(F) = 0, \quad M_{I1} + M_{I2} + (F_{IR2} - mg) \frac{3}{2} l - mg \frac{l}{2} = 0 \quad (c)$$

考虑 AB 杆平衡, 受力图如例题图 6-6(c)所示, 得

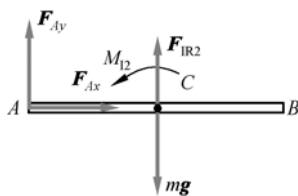
$$\sum M_A(F) = 0, \quad (F_{IR2} - mg) \frac{l}{2} + M_{I2} = 0 \quad (d)$$

将式(a)、(b)代入式(c)、(d), 联立求解可得

$$\alpha_1 = \frac{9g}{7l}, \quad \alpha_2 = -\frac{3g}{7l}$$



例题图 6-6(b)



例题图 6-6(c)

6.4 绕定轴转动刚体的轴承动约束力

刚体绕定轴转动时, 轴承处除有由主动力引起的静约束力外, 由于刚体质量分布不均衡, 还可因转动运动引起附加约束反力, 此附加部分即称为**轴承动约束力**。

下面用前面介绍的**动静法**求刚体等角速转动时的轴承动约束力。建立坐标系 $Axyz$ 并与刚体固连, 在刚体的各点加上假想的惯性力。

首先, 将此惯性力系向点 A 简化, 由式(6-6)得主矩为

$$M_{IA} = -J_{yz} \omega^2 \mathbf{i} + J_{zx} \omega^2 \mathbf{j}$$

主矢为

$$\mathbf{F}_{IR} = -m \mathbf{a}_C = m x_C \omega^2 \mathbf{i} + m y_C \omega^2 \mathbf{j}$$

式中, x_C 和 y_C 为质心在所选坐标系中的坐标。

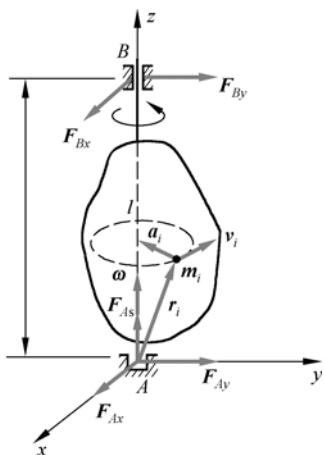


图 6-6 轴承动约束力

然后，应用达朗贝尔原理，列出平衡方程。设刚体上作用有若干主动力 \mathbf{F}_i ，则得

$$\sum M_y = 0 \quad F_{Bx} = -\frac{1}{l} \left[\sum M_y(\mathbf{F}_i) + \underline{J_{zx}\omega^2} \right]$$

$$\sum M_x = 0 \quad F_{By} = \frac{1}{l} \left[\sum M_x(\mathbf{F}_i) - \underline{J_{yz}\omega^2} \right]$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = -\sum F_{xi} + \frac{1}{l} \sum M_y(\mathbf{F}_i) + \underline{\frac{1}{l} J_{zx}\omega^2 - m x_C \omega^2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} = -\sum F_{yi} - \frac{1}{l} \sum M_x(\mathbf{F}_i) + \underline{\frac{1}{l} J_{yz}\omega^2 - m y_C \omega^2}$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Az} = -\sum F_{zi}$$

上式中，等式右边下面划线的各项均为因转动运动引起的轴承动约束力。显然，动约束力与角速度平方成正比，当高速转动时，动约束力将远远大于静约束力，并能引起轴承破坏。为了避免动约束力引起的破坏，最理想的是使动约束力为零，为此必须有

$$x_C = y_C = 0, \quad J_{yz} = J_{zx} = 0$$

因此，转轴必须通过转动刚体的质心，且为刚体的一根主轴（旋转对称刚体的对称轴就是刚体的一根主轴），即转轴为刚体的中心惯性主轴，这时刚体（转子）是动平衡的〔当然，也是静平衡的，如图 6-7(a)所示〕。当转轴不通过质心时〔如图 6-7(b)所示〕，因产生轴承动约束力，转子不平衡；由于这种不平衡可以用静力学的方法发现〔图 6-7(d)〕，故称为静不平衡。当转轴不是主轴时〔如图 6-7(c)的所示〕，转子是动不平衡的，因为这种不平衡必须通过转动才能发现。

借助动平衡实验机，利用在转子适当位置上增加或减小（如钻孔）质量的方法来改变刚体质量的分布，可以使转子成为动平衡的〔如图 6-7(e)所示〕。

现代的动平衡技术是在本世纪初随着蒸汽透平的出现而发展起来的。随着工业生产的飞速发展，旋转机械逐步向精密化、大型化、高速化方向发展，使机械振动问题越来越突出。机械的剧烈振动对机器本身及其周围环境都会带来一系列危害。虽然产生振动的原因多种多样，但普遍认为“不平衡力”是主要原因。据统计，有 50% 左右的机械振动是由不平衡力引起的。

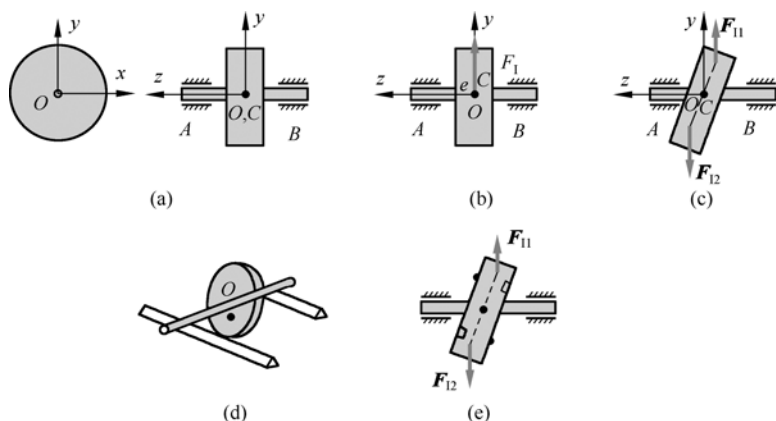


图 6-7 轴承动约束力实例

本章小结

(1) 质点的惯性力定义为

$$\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}$$

(2) 质点的达朗贝尔原理：质点上的主动力、约束力及假想的惯性力构成平衡力系。

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_I = 0$$

如果在质点系的每个质点上都加上假想的惯性力，则质点系处于平衡，这就是质点系的达朗贝尔原理。

(3) 根据达朗贝尔原理，可通过加惯性力将动力学问题转化为静力学问题求解。这就是动静法。用这种方法解题的优点是可以充分利用静力学中的解题方法及技巧。

(4) 刚体的惯性力是分布力系，向固定点 O 简化的结果为

$$\text{主矢: } \mathbf{F}_{IR} = -m\mathbf{a}_C$$

$$\text{主矩: } \mathbf{M}_{IO} = -\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$$

定轴转动时，惯性力对固定轴的力矩为

$$M_{Iz} = -J_z\alpha$$

平面运动时，惯性力向质心简化的结果为

$$\text{主矢: } \mathbf{F}_{IR} = -m\mathbf{a}_C$$

$$\text{主矩: } M_{IC} = -J_C\alpha$$

(5) 刚体绕定轴等角速转动时，由于刚体质量分布不平衡，对轴承会造成动压力。轴承相应应有动约束力，其值为

$$F_{Ax}^{(d)} = \frac{1}{l} J_{zx} \omega^2 - m x_C \omega^2$$

$$F_{Ay}^{(d)} = \frac{1}{l} J_{yz} \omega^2 - m y_C \omega^2$$

$$F_{Bx}^{(d)} = -\frac{1}{l} J_{zx} \omega^2$$

$$F_{By}^{(d)} = -\frac{1}{l} J_{yz} \omega^2$$

为了使轴承动约束力为零，转轴必须是刚体的一根中心惯性主轴，这时刚体是动平衡的。

思考题

6-1 质点系达朗贝尔原理在空间力系问题中的六个平衡方程可写为： $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$ 。是否可写为：

- (1) 四投影二矩的形式；
- (2) 四矩二投影的形式；
- (3) 五矩一投影的形式；
- (4) 六矩的形式。

6-2 平面运动刚体惯性力系主矢的方向与质心加速度的方向相反，而主矩的转向与刚体的角加速度方向一致，是否正确？

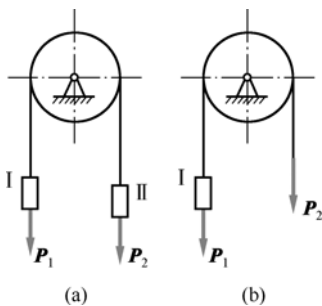
6-3 质点的达朗贝尔原理为 $\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_I = 0$ ，对由 n 个质点组成的质点系，将上式求和，有 $\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} + \mathbf{F}_{Ii}) = 0$ ，这就是质点系的达朗贝尔原理，对吗？

6-4 无论刚体做何种运动，其惯性力系主矢都可由 $\mathbf{F}_{IR} = -m\mathbf{a}_C$ (其中， m 为刚体总质量，

\mathbf{a}_C 为质心加速度) 确定吗？ \mathbf{F}_{IR} 是否与简化中心有关？

6-5 如思考题图 6-5 所示，鼓轮的转动惯量为 J_O ，绳两端挂重物 P_1 和 P_2 ，轮与绳之间无滑动。问在下述三种情况下，鼓轮两端绳的张力是否相等？

- (1) 物块 II 匀速下降。
- (2) 在轮上加一个力偶使物块 II 加速下降。
- (3) 在物块 II 上加一个力使之加速下降。

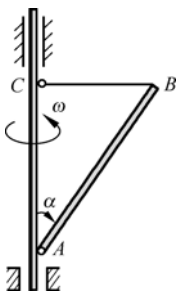


思考题图 6-5

习题

基本题

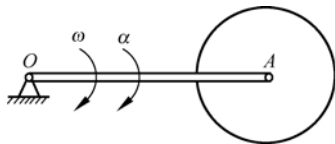
6-1 如习题图 6-1 所示，杆 AB 长为 l ，质量为 m ，以等角速度 ω 绕铅垂轴转动，求绳 BC 的张力。



习题图 6-1

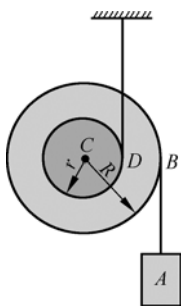
6-2 如习题图 6-2 所示，系统由匀质圆盘与匀质细杆铰接而成。已知：圆盘半径为 r ，质

量为 M ，杆长为 L ，质量为 m 。在图示位置杆的角速度为 ω ，角加速度为 α ，圆盘的角速度、角加速度均为零，试求系统惯性力系向定轴 O 简化的主矢与主矩。



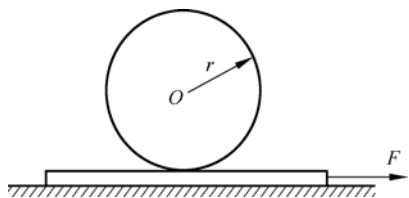
习题图 6-2

6-3 如习题图 6-3 所示，系统位于铅直面内，由鼓轮 C 与重物 A 组成。已知鼓轮质量为 m ，小半径为 r ，大半径 $R = 2r$ ，对过 C 且垂直于鼓轮平面的轴的回转半径 $\rho = 1.5r$ ，重物 A 质量为 $2m$ 。试求：(1) 鼓轮中心 C 的加速度；(2) AB 段绳与 DE 段绳的张力。



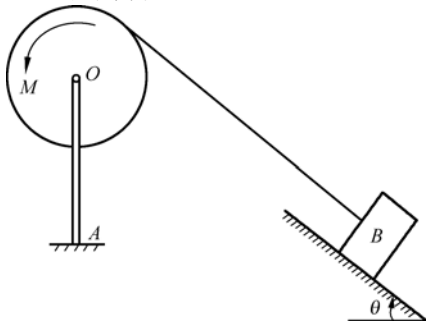
习题图 6-3

- 6-4 如习题图 6-4 所示, 重为 100 N 的平板置于水平面上, 其间的摩擦系数 $f=0.20$, 板上有一个重为 300 N、半径为 20 cm 的均质圆柱。圆柱与板之间无相对滑动, 滚动摩擦阻可略去不计。若平板上作用一个水平力 $F=200\text{N}$, 如图所示。求平板的加速度及圆柱相对于平板滚动的角加速度。



习题图 6-4

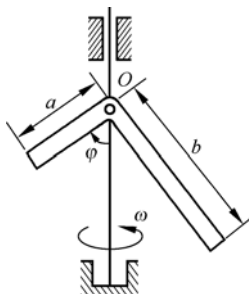
- 6-5 如习题图 6-5 所示, 匀质定滑轮装在铅直的无重悬臂梁 AO 上, 用绳与滑块相接。已知: 轮半径 $r=1\text{ m}$, 重 $Q=20\text{ kN}$, 滑块重 $P=10\text{ kN}$, 梁长为 $2r$, 斜面的倾角 $\tan\theta=3/4$, 动摩擦系数 $f'=0.1$ 。若在轮 O 上作用一个常力偶矩 $M=10\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。试用动静法求: (1) 滑块 B 上升的加速度; (2) 支座 A 处的约束力。



习题图 6-5

- 6-6 两根细长的均质直杆固连在一起互成直角, 其顶点 O 与铅直轴以铰链相连, 此轴以等

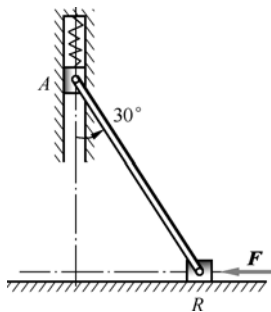
角速度 ω 转动, 如习题图 6-6 所示。求长为 a 的杆离铅直线的偏角 φ 与 ω 间的关系。



习题图 6-6

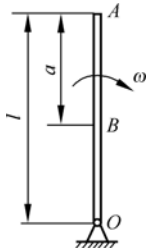
提高题

- 6-7 长为 l 、质量为 m 的均质杆与质量为 $2m$ 的滑块铰接于 B , 在水平常力 F 作用下, 滑块 B 由习题图 6-7 所示静止位置沿水平方向运动, 不计滑块 A 的质量。求杆 AB 运动至铅垂位置时滑块 B 的速度及 A, B 滑块处的约束力。设弹簧刚度为 k , 在图示静止位置具有原长, 不计各处摩擦, 并设 $F=4mg$, $k=2mg/l$ 。



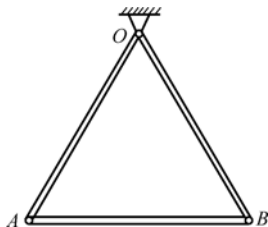
习题图 6-7

- 6-8 如习题图 6-8 所示, 长为 l 的均质等直杆从铅垂位置自由倒下。试计算当 a 为多大时, AB 段在 B 处受到的约束反力偶为最大, 因而杆也最容易在此处折断。



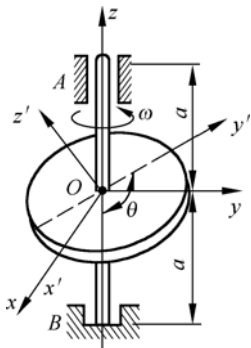
习题图 6-8

6-9 质量与长度均相等的三杆 OA , OB , AB 互相铰接, 如习题图 6-9 所示, 假如 B 铰突然撤掉, 求该瞬时杆 OA 及杆 AB 的角加速度。



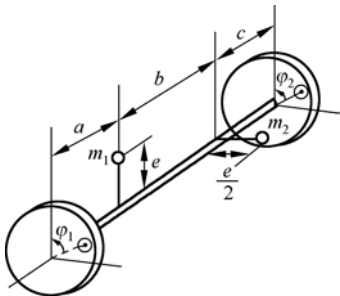
习题图 6-9

6-10 均质圆盘以等角速度 ω 绕通过盘心的铅直轴转动, 圆盘平面与转轴成 θ 角, 如习题图 6-10 所示。已知两个轴承 A 和 B 与圆盘中心相距各为 a 和 b ; 圆盘半径为 R , 质量为 m , 厚度可忽略不计。求两个轴承 A 和 B 的动约束力。



习题图 6-10

6-11 如习题图6-11所示, 装有圆盘的轴可绕水平轴转动, 在过轴线两个相互垂直的平面内装有质量为 $m_1 = 0.5 \text{ kg}$ 和 $m_2 = 1 \text{ kg}$ 的两质点。轴的两端附有 2 cm 厚的圆盘。为了均衡, 在盘上离轴 8 cm 处各钻一个孔。钢的密度为 $7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。已知 $a = c = e = 9 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$ 。求孔的直径 d_1 , d_2 和方位角 φ_1 , φ_2 。



习题图 6-11

第 7 章

动力学普遍方程与拉格朗日方程

达朗贝尔原理能将动力学问题转化为静力学问题，虚位移原理是分析静力学的普遍原理，而本章将介绍如何将两者结合导出分析动力学的普遍方程，并针对完整系统建立拉格朗日方程。

7.1 动力学普遍方程

质点系由 n 个质点组成。根据达朗贝尔原理，每个质点所受的主动力 \mathbf{F}_i 、约束力 \mathbf{F}_{Ni} 及惯性力 $\mathbf{F}_{li}(= -m\mathbf{a}_i = -m\ddot{\mathbf{r}}_i)$ 平衡。根据虚位移原理，它们在质点系虚位移上的元功之和应为零。即

$$\sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

对于受理想约束系统，有

$$\sum \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

于是，得

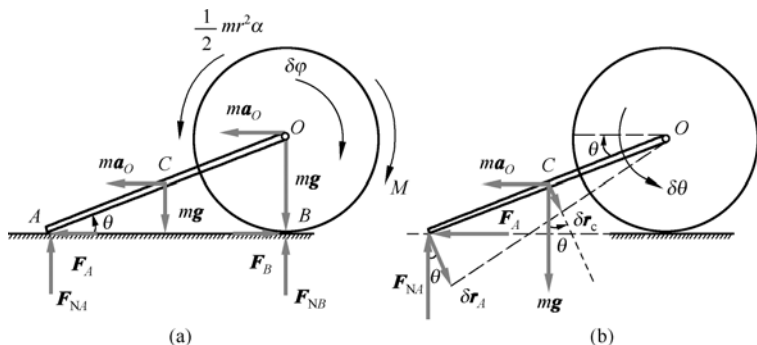
$$\sum (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (7-1)$$

上式称为达朗贝尔-拉格朗日原理或动力学普遍方程，其直角坐标表达式为

$$\sum [(F_{xi} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{yi} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{zi} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0 \quad (7-2)$$

例题 7-1

如例题图 7-1 所示，均质圆轮沿水平面做纯滚动，轮心 O 与均质杆 OA 铰接。已知轮半径为 r ，质量为 m ；杆长 $l = \sqrt{5}r$ ，质量也为 m ，杆端 A 与水平面间的滑动摩擦系数为 f 。求在常力偶 M 的作用下，(1) 轮心 O 的加速度；(2) A 处的反力。



例题图 7-1

分析：本题为具有一个自由度的动力学问题，可以首先对系统进行惯性力的简化，然后利用达朗贝尔-拉格朗日原理求解。

解:

取轮的转角 φ 为广义坐标, 画受力图。主动力包括力偶矩 M 和轮与杆的重力 mg , 虚功不为零的约束力有 F_A 。

分析系统运动, 以施加惯性力。轮做平面运动, 惯性力主矢为 $-ma_O$, 主矩 $-J_O\alpha = -mr^2\alpha/2$; 杆做平动, 惯性力主矢为 $-ma_O$ 。

根据动力学普遍方程, 如习题图 7-1(b)所示。用几何法计算虚功, 得

$$(M - mr^2\alpha/2)\delta\varphi - (2ma_O + F_{NA}f)r\delta\varphi = 0$$

因为 $a_O = \alpha r$, 以及 $\delta\varphi$ 的独立性, 故有

$$M - 5mra_O/2 - F_{NA}fr = 0 \quad (a)$$

注意到, 系统虽只有一个自由度, 但仅依靠式(a), 尚无法解出 a_O ; 因为在此式中出现了摩擦力 $F_A = F_{NA}f$ 。为此, 解除 A 端约束, 并代之以相应的约束力 F_{NA} 和 F_A , 如习题图 7-1(b)所示。使杆绕 O 有虚角位移 $\delta\theta$, 则根据动力学普遍方程, 得

$$mg \cos\theta \cdot \frac{l}{2}\delta\theta - ma_O \sin\theta \cdot \frac{l}{2}\delta\theta - F_A \sin\theta \cdot l\delta\theta - F_{NA} \cos\theta \cdot l\delta\theta = 0$$

由 $\delta\theta$ 的独立性, 得

$$\frac{ma_O}{2} \tan\theta + (f \tan\theta + 1)F_{NA} - \frac{mg}{2} = 0 \quad (b)$$

联立式(a)和式(b), 可解得

$$a_O = \frac{M(f+2) - mgr}{mr(2f+5)}, \quad F_{NA} = \frac{mgr - M}{(4f+10)r}$$

讨论:

(1) 这是具有非理想约束的系统(滑动摩擦力 F_A 是有功力), 在应用动力学普遍方程时, 只需将 F_A 当做主动力处理就可以了。由此可见, 动力学普遍方程的应用非常广泛。

(2) 由于本例题具有一个自由度, 应用动力学普遍方程只能写出一个方程。而其中出现两个未知量(a_O 和 F_{NA}), 不能求解。为此, 解除约束, 将支承 A 释放, 并代之以相应的约束力(F_A 和 F_{NA}), 再补充一个方程。

7.2 拉格朗日方程

利用广义坐标表示的动力学普遍方程

设系统的广义坐标为 q_j ($j=1, \dots, k$), 则有

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i=1, 2, \dots, n$$

代入动力学普遍方程式(7-1), 得

$$\sum_i^n \sum_j^k (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_j^k \left[\sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_i^n (-m_i \mathbf{a}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \delta q_j = 0$$

引入

$$Q_j = \sum_i^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}, \quad Q_j^* = \sum_i^n (-m_i \mathbf{a}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$$

其中, Q_j 称为广义力, Q_j^* 称为广义惯性力, 则有

$$\sum_j^k (Q_j + Q_j^*) \delta q_j = 0 \quad (7-3)$$

在受完整约束的系统中, δq_j 相互独立, 因此上式中 δq_j 前的系数必为零。于是, 有

$$Q_j + Q_j^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (7-4)$$

这就是动力学普遍方程在广义坐标中的表达式, 即广义力与广义惯性力相平衡。

拉格朗日方程

进一步研究 Q_j^* 的表达式。因为

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7-5)$$

用直接代入法可以证明下述关系式成立:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (7-6)$$

式(7-5)和式(7-6)称为拉格朗日关系式, 它们在下面的推导中起重要作用。利用式(7-6), Q_j^* 可改写为

$$\begin{aligned} Q_j^* &= -\sum_i^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = -\sum_i^n m_i \left(\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = -\frac{d}{dt} \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

引入质点系动能:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

则有

$$Q_j^* = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (7-7)$$

代入式(7-6), 得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (7-8)$$

这就是完整系统中的拉格朗日第二类方程, 通常称为**拉格朗日方程** (equation of Lagrange), 简称拉氏方程。

关于拉格朗日方程的几点说明

- (1) 适用于完整、理想约束系统, 用广义坐标描述系统的运动;
- (2) 方程中不出现约束力, 直接建立主动力与运动之间的关系;
- (3) 得到的是常微分方程组, 每个方程都是二阶的, 方程数与自由度数相同;
- (4) 是建立非自由质点系动力学数学模型的规范方法;
- (5) 当主动力有势时, 势能 $V = V(q_1, \dots, q_k)$, $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, 拉氏方程(7-8)可写为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (7-9)$$

或

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (7-10)$$

式中, $L = T - V$ 称为质点系的拉格朗日函数, 简称为拉氏函数。

例题 7-2

在如例题图 7-2(a)所示的系统中, 物块 A 与球 B 看成两个质点, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 用质量不计的长为 l 的杆相连。水平面光滑, 求系统的运动微分方程。

分析: 本例题是一个具有理想约束且主动力 (重力) 有势的系统, 可以利用保守系统的拉氏方程(7-9)列出系统的运动微分方程。该系统的自由度数为 2。

解:

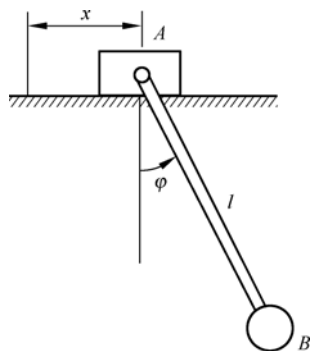
选 x 和 φ 为广义坐标, 有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{\varphi} \dot{x} \cos\varphi \end{aligned} \quad (a)$$

$$V = -m_2 g l \cos\varphi \quad (b)$$

拉氏方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



例题图 7-2(a)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

将(a)、(b)代入上式得系统的运动微分方程

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + m_2 l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = 0 \\ m_2 l (l\ddot{\varphi} - \cos \varphi \cdot \ddot{x} + \dot{x} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) + m_2 g l \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (c)$$

讨论:

(1) 系统有两个自由度, 因此由拉格朗日方程获得两个微分方程; 两个方程是耦合的, 惯性项(质量与加速度乘积项)的耦合系数一定相等, 本例题中是 $m_2 l \cos \varphi$ 。这可以作为检验推导是否正确的一种方法。

(2) 如果 m_2 的摆动很小, 则可近似认为 $\sin \varphi \approx \varphi$ 、 $\cos \varphi \approx 1$, 并忽略所有二阶以上的小量, 即由式(c)得线性化方程为

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \\ l\ddot{\varphi} - \ddot{x} + g\varphi = 0 \end{cases}$$

从上式中的第二式可得

$$\ddot{x} = l\ddot{\varphi} + g\varphi$$

将它代入第一式并整理后可得

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0$$

即

$$\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0$$

这是一个自由振动的微分方程, 其解的形式为

$$\varphi = A \sin(\omega_n t + \theta)$$

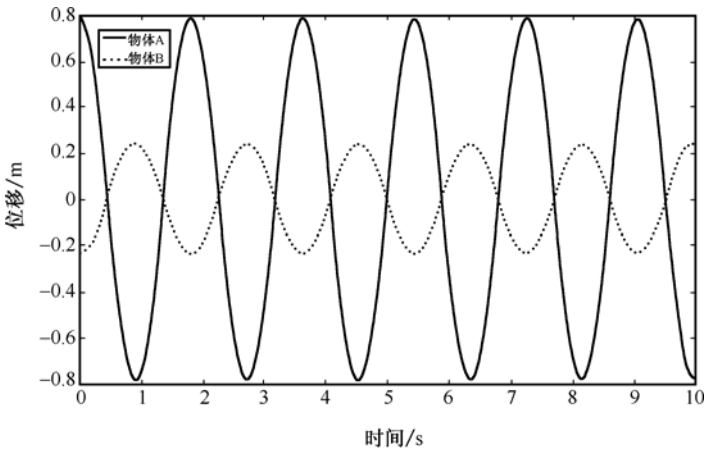
其中, ω_n 为系统的圆频率; A 为振幅, 由初始条件 φ_0 和 $\dot{\varphi}_0$ 确定, 即

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\omega_n^2}}$$

(3) 式(c)中的运动微分方程是严重非线性的, 一般需要利用数值方法求解。设 $y_1 = \varphi$, $y_2 = \dot{\varphi}$, $y_3 = x$, $y_4 = \dot{x}$, 则式(c)可化为四个一阶微分方程, 即

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{-ay_2^2 \cos y_1 \sin y_1 - \frac{g}{l} \sin y_1}{1 - a \cos^2 y_1} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{ag \cos y_1 \sin y_1 + ay_2^2 \sin y_1}{1 - a \cos^2 y_1} \end{cases}$$

式中， $a=m_2/(m_1+m_2)$ 。接下来就可以利用附录 B 中的 MATLAB 程序求解上述方程组了。物体 A 与 B 的位移曲线如例题图 7-2(b)所示。

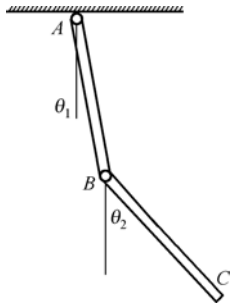


例题图 7-2(b)

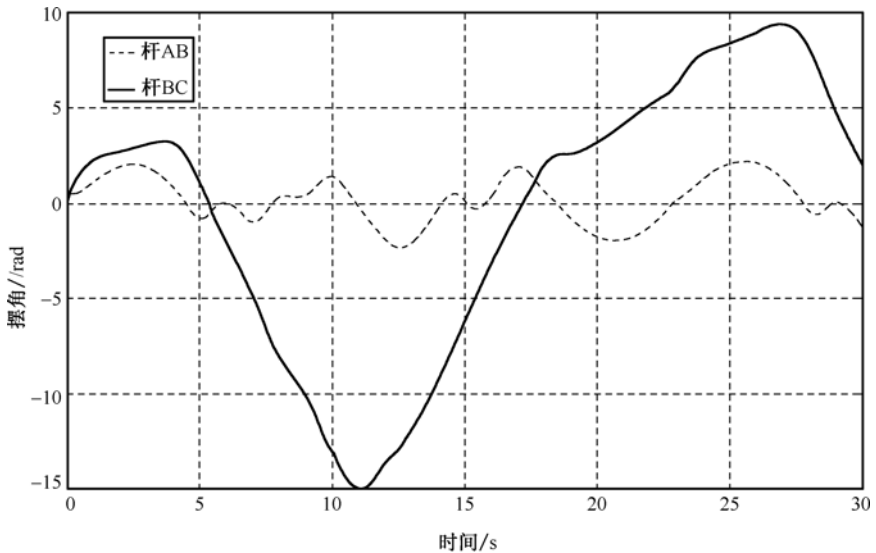
(4) 同理，对例题图 7-2(c)所示的双复摆，也可利用拉格朗日方程写出该系统的运动微分方程组：

$$\begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2g \sin \theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

利用上述数值方法求解这个微分方程组可以得到该双复摆的运动规律，如例题图 7-2(d)所示（源程序见附录 B）。



例题图 7-2(c)



例题图 7-2(d)

杆 AB 和 BC 的运动规律与初始条件有关，且其运动不具有周期性。请有兴趣的读者参阅有关混沌的知识。

例题 7-3

如例题图 7-3 所示, 均质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 其 A 端用刚度系数为 k 的弹簧连接, 并可沿铅直方向振动, 同时杆 AB 还可以绕点 A 在铅直面内摆动。试用拉氏方程导出运动微分方程。

解:

系统有两个自由度: $q = (x, \theta)^T$, 其中 x 从弹簧原长计起。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 \quad (\text{a})$$

为了求质心速度 v_C , 以 A 为基点, 速度合成公式 $v_C = v_A + v_{CA}$, 其中 $v_A = \dot{x}$, $v_{CA} = \frac{L}{2} \dot{\theta}$, 各速度的方向如例题图 7-3 所示, 将速度合成公式向轴 x, y 投影, 则

$$\begin{cases} v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ v_{Cx} = \dot{x}_C = \dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (\text{b})$$

将式(b)代入式(a), 可得

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 - \dot{x} \dot{\theta} l \sin \theta + \frac{1}{3} l^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

在计算弹簧势能与重力势能时, 选 O 为共同的势能零点, 则有

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - mg \left(x + \frac{l}{2} \cos \theta \right)$$

$$L = T - V$$

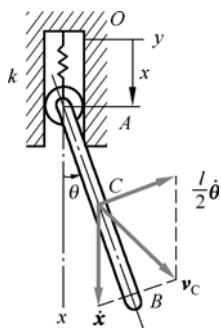
代入拉氏方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

得杆的运动微分方程式为

$$m \ddot{x} - \frac{1}{2} m l \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 \cos \theta + kx - mg = 0$$

$$\frac{l}{3} \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \ddot{x} \sin \theta + \frac{1}{2} g \sin \theta = 0$$



例题图 7-3

讨论:

(1) 在计算杆的动能, 求解质心速度 v_C 时, 也可应用余弦定理, 则

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 - 2 \dot{x} \left(\frac{l}{2} \dot{\theta} \right) \sin \theta$$

或先写出点 C 的运动方程再进行微分, 则有

$$\begin{cases} x_C = x + \frac{1}{2}\cos\theta, & \dot{x}_C = \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ y_C = \frac{l}{2}\sin\theta, & \dot{y}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

(2) 系统的动能式(a)必须应用第5章中刚体平面运动的动能公式(5-52), 决不能简单地写为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{l}{2}J_A\dot{\theta}^2, \quad J_A = \frac{1}{3}ml^2$$

请读者思考为什么。

7.3 拉格朗日方程的初积分

循环积分

对受完整、理想约束且主动力有势的系统, 如果拉氏函数 L 不显含某一广义坐标 q_i , 即

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (7-11)$$

则 q_j 称为循环坐标 (cyclic coordinate)。由拉氏方程(7-10), 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= \text{常数} \end{aligned} \quad (7-12)$$

上式称为拉氏方程的循环积分 (cyclic integration)。有几个循环坐标就有几个循环积分。

注意到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad (7-13)$$

式中, p_j 称为广义动量, 因此式(7-18)表明: 对于循环坐标, 广义动量守恒。

能量积分

对受完整、理想约束且主动力有势的系统, 如果拉氏函数 L 中不显含时间 t , 即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (7-14)$$

则

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

拉氏方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

将以上每个拉氏方程乘以 \dot{q}_j 再相加, 得

$$\sum_{j=1}^k \left[\dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0$$

或

$$\sum_{j=1}^k \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{dL}{dt} \right] = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right] = 0$$

得拉氏方程的初积分为

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{常数} \square h \quad (7-15)$$

现考察上述积分的物理意义。设约束为稳定的，则系统的动能 T 为广义速度 \dot{q}_j 的二次齐次式：

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{ij}(q_i) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^k m_{ij}(q_i) \dot{q}_i$$

于是，有

$$\sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^k \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

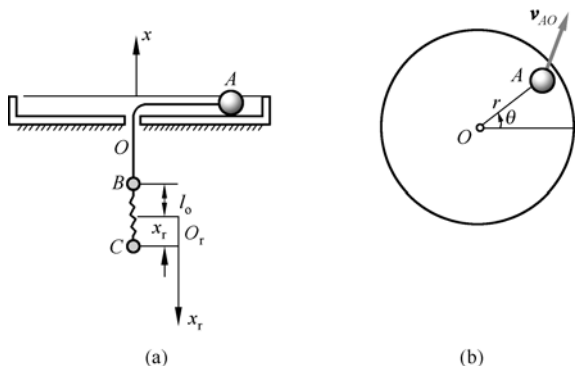
代入式(7-20)，得

$$2T - (T - V) = T + V = h = \text{常数}$$

这是系统的能量积分，因而式(7-21)称为（非稳定约束情况下的）广义能量积分。

例题 7-5

如例题图 7-5 所示，小球 A ， B ， C 均视为质点，质量均为 m 。球 A ， B 由长度为 L 的不可伸长细绳连接，球 B ， C 由原长为 l_0 、刚度系数为 k 的弹簧相连。小球 A 放置在光滑水平圆盘上，细绳穿过光滑小孔 O ， OB 与弹簧保持铅垂。初始时刻， $OA = r_0$ ，小球的初速度为 \mathbf{v}_{AO} （沿水平面上任意方向）。试：(1)列出系统的动能与势能表达式；(2)分析系统的首次积分，并说明其物理意义。



例题图 7-5

解:

系统有三个自由度: $q = (r, \theta, x_r)^T$, 动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r} - \dot{x}_r)^2 = \frac{m}{2}(3\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{r}\dot{x}_r + \dot{x}_r^2)$$

$$V = -mg(l-r) - mg(l-r+l_0+x_r) + \frac{1}{2}kx_r^2 = -mg[(2(l-r)+l_0+x_r)] + \frac{1}{2}kx_r^2$$

显然, 有 $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, 因此系统有循环坐标 θ , 循环积分为

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\theta} = \text{常数}$$

其物理意义为系统对轴 x 的动量矩守恒。

又因 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, 且为稳定约束, 所以系统机械能守恒:

$$T + V = \frac{m}{2}(3\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{r}\dot{x}_r + \dot{x}_r^2) - mg[2(l-r)+l_0+x_r] + \frac{1}{2}kx_r^2 = E = \text{常数}$$

本章小结

(1) 将达朗伯原理与虚位移原理相结合, 可得动力学普遍方程为

$$\sum_i^n (F_i - m_i a_i) \cdot \delta r_i = 0$$

$$\sum [(F_{xi} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{yi} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{zi} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0$$

其应用范围是理想约束系统。对于非理想约束, 可将做功的约束力视为主动力, 仍可应用该原理。

(2) 由动力学普遍方程可推导出完整、理想约束系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

当主动力有势时, 可引入拉格朗日函数 $L = T - V$, 将拉格朗日方程写为如下形式:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

(3) 拉格朗日方程有以下两类初积分:

当 $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ 时, 有循环积分, 即

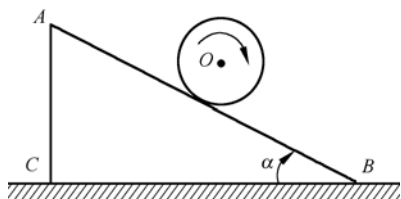
$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{常数}$$

当 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ 时, 有广义能量积分

$$\sum_j^k q_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = h = \text{常数} \quad (\text{对稳定约束为 } T + V = h)$$

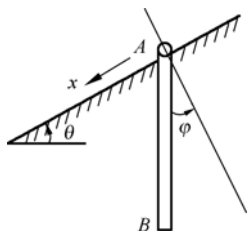
习 题

- 7-1 如习题图 7-1 所示, 在光滑的水平面上放置一个质量为 M 的三棱柱 ABC , AB 斜面倾角为 α , 一个质量为 m 的匀质圆柱沿该三棱柱的斜面 AB 无滑动地滚下, 求三棱柱后退的加速度。



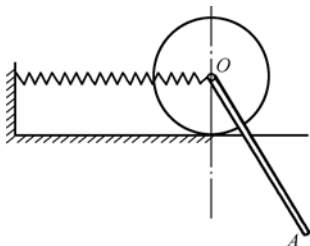
习题图 7-1

- 7-2 如习题图 7-2 所示, 均质杆 AB 长为 l , 质量为 m , 借助其 A 端销子沿斜面滑下, 斜面倾角为 θ , 不计销子质量和摩擦, 求杆的运动微分方程。又设杆当 $\varphi=0$ 时由静止开始运动, 求开始运动时斜面受到的压力。



习题图 7-2

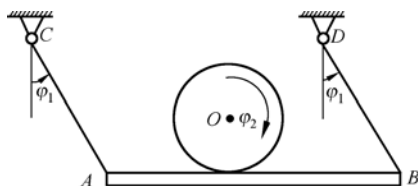
- 7-3 如习题图 7-3 所示, 半径为 r 、重为 W_1 的均质圆轮在水平地面上做纯滚动, 轮心与刚度为 k 的弹簧相连。在轮心上还铰接一个重为 W_2 、长为 l 的均质杆。试列出拉格朗日方程并推导系统的运动微分方程。



习题图 7-3

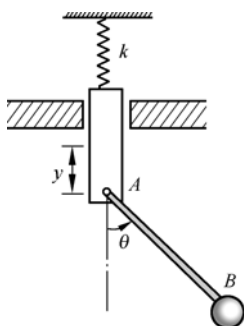
- 7-4 如习题图 7-4 所示, 系统由均质圆柱和平板 AB 组成, 圆柱体重量为 P , 半径为 R , 平板 AB 重量为 Q , AC 与 BD 两根悬绳相互

平行, $AC = BD = l$, 且圆柱相对于平板只滚不滑。试用第二类拉格朗日方程求该系统在平衡位置附近做微摆动的运动微分方程。



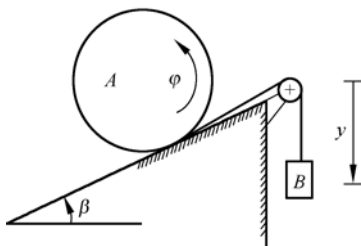
习题图 7-4

- 7-5 在习题图 7-5 所示的系统中, 已知: 摆锤 B 的质量为 m , 摆长为 b , 其他物体的质量均忽略不计, 弹簧的弹性系数为 k 。试用动力学普遍方程建立系统的运动微分方程, 以 y 和 θ 为系统的广义坐标 (y 从点 A 的静平衡位置算起)。



习题图 7-5

- 7-6 在如习题图 7-6 所示的系统中, 已知: 匀质圆柱 A 质量为 M , 半径为 r , 物块 B 质量为 m , 光滑斜面的倾角为 β , 滑轮大小和质量不计。试用动力学普遍方程求: (1) 系统的运动微分方程, 以 y 和 φ 为广义坐标; (2) 圆柱 A 的角加速度 α 和物块 B 的加速度 a 。



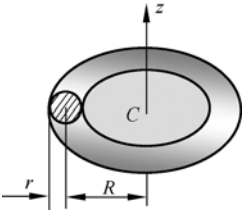
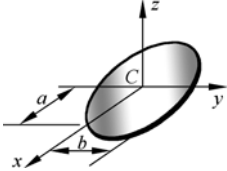
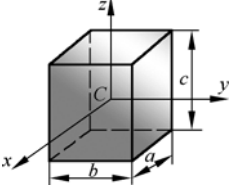
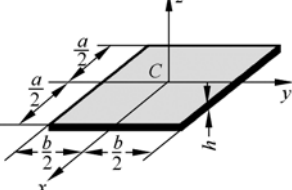
习题图 7-6

附录 A

常见均质物体的转动惯量和回转半径

形状	简图	转动惯量	回转半径	体积
细直杆		$J_{zC} = \frac{m}{12}l^2$ $J_z = \frac{m}{3}l^2$	$\rho_{zC} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0.289l$ $\rho_z = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.578l$	
薄壁圆筒		$J_z = mR^2$	$\rho_z = R$	$2\pi Rlh$
圆柱		$J_z = \frac{1}{2}mR^2$ $J_x = J_y = \frac{m}{12}(3R^2 + l^2)$	$\rho_z = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$ $\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{1}{12}(3R^2 + l^2)}$	πR^2l
空心圆柱		$J_z = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{2}(R^2 + r^2)}$	$\pi l(R^2 - r^2)$
薄壁空心球		$J_z = \frac{2}{3}mR^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{2}{3}}R = 0.816R$	$\frac{3}{2}\pi R^2h$
实心球		$J_z = \frac{2}{5}mR^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{2}{5}}R = 0.632R$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
圆锥体		$J_z = \frac{3}{10}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{3}{80}m(4r^2 + l^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{3}{10}}r = 0.548r$ $\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{3}{80}(4r^2 + l^2)}$	$\frac{\pi}{3}r^2l$

续表

形状	简图	转动惯量	回转半径	体积
圆环		$J_z = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$	$\rho_z = \sqrt{R^2 + \frac{3}{4}r^2}$	$2\pi^2 r^2 R$
椭圆形薄板		$J_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{4}a^2$ $J_x = \frac{m}{4}b^2$	$\rho_z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_y = \frac{a}{2}$ $\rho_x = \frac{b}{2}$	πabh
立方体		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + c^2)}$ $\rho_x = \sqrt{\frac{1}{12}(b^2 + c^2)}$	abc
矩形薄板		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}a^2$ $J_x = \frac{m}{12}b^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = 0.289a$ $\rho_x = 0.289b$	abh

附录 B

MATLAB 程

1. 例题 7-2 MATLAB 程序

```
g=9.8;m1=4;m2=2;l=1;
[t,y]=ode45('hdbfun',[0:0.001:10],[pi/4,0,-l*cos(pi/4)*2/(4+2),0],[],m1,
m2,g,l);
set(gcf,'unit','normalized','position',[0.03 0.1 0.5 0.5]);
cla;
plot(t,y(:,1),t,y(:,3))
xlabel('时间/s');ylabel('位移/m');
legend('物体 A','物体 B');
```

2. 利用 MATLAB 研究双复摆的运动

```
l=10;
[t,u]=ode45('jjsbfun',[0:0.01:30],[0.5,0.2,0.1,2.8],[],1);
y1=-l*cos(u(:,1));
x1=l*sin(u(:,1));
y2=y1-l*cos(u(:,3));
x2=x1+l*sin(u(:,3));
figure(1)
set(gcf,'unit','normalized','position',[0.03 0.1 0.5 0.5]);
cla;
plot(t,u(:,1),'g',t,u(:,3),'r')
xlabel('时间/s');ylabel('摆角/rad');
legend('杆 AB','杆 BC');
```

附录 C

习题参考答案

第 1 章

$$1-1 \quad \dot{x} = -\frac{v_0 \sqrt{l^2 + x^2}}{x}, \quad \ddot{x} = -\frac{v_0^2 l^2}{x^3}$$

$$1-2 \quad \begin{cases} x = R \cos 2\omega t \\ y = R \sin 2\omega t \end{cases}, \quad S = 2R\omega t, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = 4R\omega^2$$

$$1-3 \quad v_A = v, \quad a_A = \frac{2bhv^2}{(y-h)^3}$$

$$1-4 \quad v_M = v \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}, \quad a_M = \ddot{y} = -\frac{v^2}{4x} \sqrt{\frac{2p}{x}}$$

$$1-5 \quad \begin{aligned} t=0: & \quad a = 10 \text{ m/s}^2 \\ t=1: & \quad a_\tau = 10 \text{ m/s}^2, \quad a_n = 106.7 \text{ m/s}^2 \\ t=2: & \quad a_\tau = 10 \text{ m/s}^2, \quad a_n = 83.3 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$1-6 \quad \theta = \arctan \left[\frac{\sin \omega_0 t}{\frac{h}{r} - \cos \omega_0 t} \right]$$

$$1-7 \quad a_r = \sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R} \right)^2} + 2g \frac{v_0^2}{R} \cos \varphi$$

$$1-8 \quad \rho = 5 \text{ m}, \quad a_I = 8.66 \text{ m/s}^2$$

$$1-9 \quad \omega = 2\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\alpha} = -1.5\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_C = -0.3889\mathbf{i} + 0.1768\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$1-10 \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \omega \times \mathbf{r} = -8\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j} - 3.6\mathbf{k} \text{ m/s} \\ \mathbf{a}_A &= \omega \times \mathbf{v} = -240\mathbf{i} - 256\mathbf{j} + 192\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

第 2 章

$$2-1 \quad \omega_{AB} = \frac{\omega e}{l}$$

$$2-2 \quad v_{AB} = e\omega$$

$$2-3 \quad \omega = \omega_0$$

$$2-4 \quad \omega_{O_2D} = \frac{v_a}{l} = 0.67 \text{ rad/s}, \quad \alpha_{O_2D} = \frac{a_a^\tau}{l} = \frac{a_a^n \sin \varphi - a_e \sin \theta}{l \cos \varphi} = -2.05 \text{ rad/s}^2$$

$$2-5 \quad v_{CD} = 0.10 \text{ m/s} \quad (\uparrow), \quad a_{CD} = 0.35 \text{ m/s}^2 \quad (\uparrow)$$

$$2-6 \quad a_M = 0.356 \text{ m/s}^2$$

$$2-7 \quad v_a = \sqrt{3}v_e = 0.173 \text{ m/s}, \quad a_M = a_a = 0.35 \text{ m/s}^2$$

$$2-8 \quad \alpha_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0^2$$

$$2-9 \quad (1) \quad \omega_{AB} = 0.75 \text{ rad/s}, \quad v_r = 1 \text{ m/s}; \quad (2) \quad \alpha = -1.03 \text{ rad/s}^2, \quad a_r = 0.8 \text{ m/s}^2$$

$$2-10 \quad \alpha_{O_2E} = 4.55 \text{ rad/s}^2$$

$$2-11 \quad v_{CD} = 0.325 \text{ m/s}, \quad a_{CD} = 0.657 \text{ m/s}^2$$

$$2-12 \quad v = 0.529 \text{ m/s}, \quad a = 0.316 \text{ m/s}^2$$

$$2-13 \quad v_a = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{v_1 + v_2 - 2v_1v_2 \cos \theta}, \quad a_a = 0$$

2-14 略

2-15 略

第 3 章

$$3-1 \quad \omega_{AB} = v_{BA} / AB = \sqrt{2}\omega_O / 2(1 + \sqrt{2}), \quad v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}r\omega_O$$

$$3-2 \quad \omega_1 = v_B / BO_1 = 2 / 0.3 = 6.67 \text{ rad/s}, \quad \alpha_1 = 192.7 \text{ rad/s}^2$$

$$3-3 \quad \omega_{EF} = 1.33 \text{ rad/s}, \quad v_F = 0.462 \text{ m/s}$$

$$3-4 \quad \omega_{OB} = 3.75 \text{ rad/s}, \quad \omega = 6 \text{ rad/s}$$

$$3-5 \quad n = 10800 \text{ r/min}$$

$$3-6 \quad v_F = 1.295 \text{ m/s}$$

$$3-7 \quad v_O = \frac{R}{R-r}v, \quad a_O = \frac{R}{R-r}a$$

$$3-8 \quad a_B = 40\sqrt{3} / 3 \text{ cm/s}^2, \quad \alpha_{AB} = 4 / \sqrt{3} \text{ rad/s}^2, \quad a_D = 20\sqrt{3} / 3 \text{ cm/s}^2$$

$$3-9 \quad \omega_{BC} = 0.8 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 1.6 \text{ rad/s}, \quad \alpha_1 = a_B^r / O_1B = 0$$

$$3-10 \quad v_B = R\omega_0 \cot \theta, \quad a_B = R\alpha_0 \cot \theta + (R^2\omega_0^2 / L \sin^3 \theta)$$

$$3-11 \quad \omega_{O_1A} = 0.2 \text{ rad/s}, \quad \alpha_{O_1A} = 0.046 \text{ rad/s}^2$$

$$3-12 \quad v_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{15} \text{ m/s}, \quad a_{CD} = \frac{2}{3} \text{ m/s}^2$$

$$3-13 \quad v_{Dr} = \frac{2a\omega_0}{\sqrt{3}}$$

$$3-14 \quad \alpha_{AC} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = 2.87 \text{ rad/s}^2, \quad a_r = -545.28 \text{ mm/s}^2$$

$$3-15 \quad \omega_{DF} = 0.6\omega_0, \quad \alpha_{DF} = 0.315\omega_0^2$$

$$3-16 \quad \omega_{DE} = 1 \text{ rad/s}, \quad \alpha_{DE} = 0.92 \text{ rad/s}^2$$

$$3-17 \quad v_B = \sqrt{3}L\omega_0, \quad a_B = 3(1 + \sqrt{3})L\omega_0^2$$

$$3-18 \quad \omega_{O_1B} = \frac{\omega_0}{2}, \quad \alpha_{O_1B} = \frac{\sqrt{3}\omega_0^2}{12}$$

第 4 章

$$4-1 \quad M = Fa \tan 2\theta$$

$$4-2 \quad F_3 = P$$

$$4-3 \quad F_A = -2450 \text{ N}, \quad F_B = 14700 \text{ N}, \quad F_E = 2450 \text{ N}$$

$$4-4 \quad F_{Dy} = \frac{M}{2l} + ql, \quad F_{By} = P + 2ql - \frac{M}{l}, \quad F_{Ay} = \frac{M}{2l} - ql$$

$$4-5 \quad F_{AC} = \sqrt{5}P, \quad F_{BC} = 0$$

$$4-6 \quad F_{N1} = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{3} = \frac{11}{3} \text{ kN}, \quad F_{N2} = -\frac{11}{4} \text{ kN}$$

$$4-7 \quad M_A = 4F \sin \theta - 2q = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad F_{Ay} = \frac{1 \cdot F - M}{4 \cos 30^\circ} = 0.577 \text{ kN}$$

$$4-8 \quad F_B = -M + F \cdot 2l = 5 \text{ kN}$$

$$4-9 \quad F_{Bx} = -\frac{F}{2} = -9 \text{ kN}, \quad F_{By} = \frac{Fl_2 - 2M}{2l_1} = 11.5 \text{ kN}$$

$$4-10 \quad \tan \theta_1 = \frac{2P}{5W}, \quad \tan \theta_2 = \frac{2P}{3W}, \quad \tan \theta_3 = \frac{2P}{W}$$

$$4-11 \quad \sin \theta = \frac{F}{ak}$$

$$4-12 \quad y_1 = 0, \text{ 不稳定}; \quad y_2 = \frac{2}{k} \sqrt{P(kb - P)}, \text{ 当 } kb > P \text{ 时稳定。}$$

第5章

$$5-1 \quad \frac{5}{2} ml_1 \omega$$

$$5-2 \quad (a) \quad L_O = m \left(\frac{R^2}{2} + l^2 \right) \omega; \quad (b) \quad L_O = ml^2 \omega; \quad (c) \quad L_O = m(R^2 + l^2) \omega$$

$$5-3 \quad \omega = \frac{mlv_0(1 - \cos \varphi)}{J_Z + m(l^2 + r^2 + 2lr \cos \varphi)}$$

$$5-4 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m + m_1} x = \frac{m_1}{m + m_1} l \omega^2 \sin \omega t$$

$$5-5 \quad a_A = \frac{F - f(M + m)g}{m + 3M}$$

$$5-6 \quad a = \frac{4}{7} g \sin \theta; \quad F = -\frac{1}{7} mg \sin \theta$$

$$5-7 \quad (1) \quad a = \frac{4}{5} g; \quad (2) \quad M > 2mgr$$

$$5-8 \quad v_A = \sqrt{\frac{3}{m} [M\theta - mgl(1 - \cos \theta)]}$$

$$5-9 \quad T = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

$$5-10 \quad F_x = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2} m_1 g \cos \theta$$

$$5-11 \quad v_B = (v_{B0}^2 - 9gks^2 / 8200)^{1/2}$$

$$5-12 \quad F = 9.8 \text{ N}$$

$$5-13 \quad a_A = \frac{1}{6}g; \quad F = \frac{4}{3}mg; \quad F_{kx} = 0, \quad F_{ky} = 4.5mg, \quad M_k = 13.5mgR$$

$$5-14 \quad a_C = 1.52 \text{ m/s}^2$$

$$5-15 \quad a = \frac{4\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}g$$

$$5-16 \quad a_{Cx} = \frac{12gd^2\sin\alpha}{l^2+12d^2}, \quad F_N = \frac{mgl^2\sin\alpha}{l^2+12d^2}$$

$$5-17 \quad \Delta T = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{1}{4}3\sin^2\theta\right), \quad u_{B1} = L\omega_1 = \left(\frac{1}{4}9v_0^2\sin^2\theta + 3gL\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$5-18 \quad \omega = 5.78 \text{ rad/s}; \quad I_x = 6.13 \text{ N}\cdot\text{s}, \quad I_y = 10.4 \text{ N}\cdot\text{s}; \quad v_0 \geq 1.02 \text{ m/s}$$

$$5-19 \quad \omega_{BC} = 2.50 \text{ rad/s}$$

$$5-20 \quad \alpha_{AB} = 3.53 \text{ rad/s}^2, \quad F_A = 358 \text{ N}, \quad F_B = 176.4 \text{ N}$$

$$5-21 \quad \alpha_{AC} = \frac{1}{4}3g/4l, \quad \alpha_{BC} = 69g/55l, \quad \alpha_{AB} = 18g/55l$$

$$5-22 \quad v_A = 0, \quad v_B = 3 \text{ m/s}$$

第 6 章

$$6-1 \quad F_T = \frac{1}{3}ml\omega^2\sin\alpha + \frac{1}{2}mgtg\alpha$$

$$6-2 \quad F_{IR}^r = \sum m_i a_{Ci}^r = (mL/2 + ML) \cdot \alpha, \quad F_{IR}^n = \sum m_i a_{Ci}^n = (mL/2 + ML) \cdot \omega^2, \\ M_{g0} = \left(\frac{1}{3}mL^2 + ML^2\right) \cdot \alpha$$

$$6-3 \quad a_C = \frac{4}{21}g, \quad F_{AB} = \frac{34}{21}mg, \quad F_{DE} = \frac{59}{21}mg$$

$$6-4 \quad a = \frac{120}{200}g = 5.88 \text{ m/s}^2; \quad \alpha = \frac{2}{3r}a = 19.6 \text{ rad/s}^2$$

$$6-5 \quad a_B = 1.57 \text{ m/s}^2; \quad F_{Ax} = 6.72 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 25.04 \text{ kN}$$

$$6-6 \quad \omega^2 = 3g \frac{b^2 \cos\varphi - a^2 \sin\varphi}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}$$

$$6-7 \quad v_B = 1.28\sqrt{gl}, \quad F_A = 0.29mg(\leftarrow), \quad F_B = 2.45mg$$

$$6-8 \quad a = \frac{2}{3}l, \quad M_{B\max} = \frac{1}{27}mgl\cos\varphi$$

$$6-9 \quad \alpha_{OA} = \frac{18g}{55l}, \quad \alpha_{AB} = \frac{69g}{55l}$$

$$6-10 \quad F_{Ay} = -F_{By} = \frac{MR^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\theta, \quad F_{Ax} = F_{Bx} = 0$$

$$6-11 \quad d_1 = d_2 = 6.02 \text{ cm}, \quad \varphi_1 = 18.43^\circ, \quad \varphi_2 = 71.6^\circ$$

第 7 章

$$7-1 \quad a = \frac{mg\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha}$$

$$7-2 \quad F_N = mg \frac{\cos \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

$$7-3 \quad \begin{cases} (3W_1 + 2W_2)\ddot{x} + W_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - W_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + kgx = 0 \\ \frac{2}{3} l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

$$7-4 \quad \begin{cases} \frac{Q+P}{g} l^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{P}{g} R l \ddot{\varphi}_2 + (P+Q) l \varphi_1 = 0 \\ \frac{3PR^2}{2g} \ddot{\varphi}_2 + \frac{P}{g} R l \ddot{\varphi}_1 = 0 \end{cases}$$

$$7-5 \quad m\ddot{y} - mb(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + ky = 0, \quad mb\ddot{\theta} - m\ddot{y} \sin \theta + mg \sin \theta = 0$$

$$7-6 \quad (M+m)\ddot{y} - Mr\ddot{\varphi} + Mg \sin \beta - mg = 0, \quad 3r\ddot{\varphi} - 2\ddot{y} - 2g \sin \beta = 0; \\ \ddot{y} = a = (3m - M \sin \beta)g / (M + 3m), \quad \ddot{\varphi} = \alpha = 2m(1 + \sin \beta)g / [(M + 3m)r]$$

参 考 文 献

- [1] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [2] 范钦珊, 刘燕, 王琪. 理论力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [3] 贾书惠. 理论力学教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [4] 朱照宣. 理论力学(上、下) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1982.
- [5] 税国双. 理论力学[M]. 北京: 北京交通大学出版社, 2009.
- [6] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. Engineering Mechanics: Dynamics - SI Version[M]. 3rd Edition. Stanford: Cengage Learning, 2010.